Démonstration des lois de Kepler

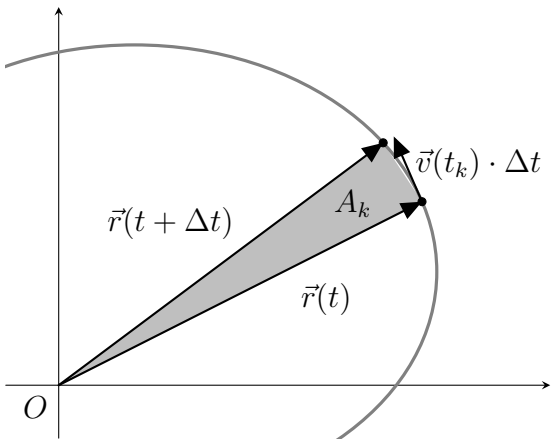


Table des matières

Introduction 2
1 Prérequis d'analyse vectorielle 3
2 Démonstration de la 1ère loi 8
3 Démonstration de la 2e loi 12
4 Démonstration de la 3e loi 14
5 Exercices 15
6 Réponses des exercices 18
Corrigés 19

Introduction

Nous allons dans ce document démontrer les trois lois de Kepler en utilisant essentiellement les outils mathématiques fournis par le programme du gymnase. Néanmoins, nous commencerons par présenter quelques notions d'analyse vectorielle, chapitre qui n'est pas traité en cours.

Le développement présenté dans ce script suit en grande partie un manuscrit de Eugène Pasquier que je remercie pour la mise à disposition de son méticuleux travail.

1 Prérequis d'analyse vectorielle

1.1 Définitions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $t_0 \in I$ et $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction.

(a) *La **limite** de $\vec{r}$ en t_0 est*

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t \to t_0} r_x(t) \\ \lim\limits_{t \to t_0} r_y(t) \\ \lim\limits_{t \to t_0} r_z(t) \end{pmatrix}.}$$

(b) *La fonction $\vec{r}$ est **continue** en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$. On dit que $\vec{r}$ est continue sur I si $\vec{r}$ est continue en tout $t \in I$.*

L'étude de la continuité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ peut se ramener l'étude de la continuité de fonctions réelles :

1.2 Théorème

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $t_0 \in I$ et $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction. La fonction $\vec{r}$ est continue en t_0 si et seulement si les fonctions r_x, r_y et r_z sont continues en t_0.

Démonstration

Voir l'exercice 1. □

Les propriétés suivantes découlent directement des propriétés du calcul de limites des fonctions réelles :

1.3 Propriétés

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $t_0 \in I$, $\vec{a}, \vec{b} : I \to \mathbb{R}^3$ et $\alpha : I \to \mathbb{R}$ des fonctions. Si les limites de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et α en t_0 existent et sont composantes finies nous avons alors :

(a) $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) \pm \vec{b}(t) = \left(\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t)\right) \pm \left(\lim\limits_{t \to t_0} \vec{b}(t)\right)$,

(b) $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t) \cdot \vec{b}(t) = \left(\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t)\right) \cdot \left(\lim\limits_{t \to t_0} \vec{b}(t)\right)$,

(c) $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t) = \left(\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t)\right) \cdot \left(\lim\limits_{t \to t_0} \vec{b}(t)\right)$,

(d) $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) \times \vec{b}(t) = \left(\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t)\right) \times \left(\lim\limits_{t \to t_0} \vec{b}(t)\right)$.

Démonstration

Point (c) fait dans l'exercice 1, autres points à traiter comme exercice supplémentaire. □

1.4 Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $t \in I$ et $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction. La ***dérivée*** *de $\vec{r}$ en t est le vecteur*

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.}$$

Si cette limite existe et donne un vecteur de composantes finies, on dit que $\vec{r}$ est ***différentiable*** *(ou* ***dérivable****) en t et si $\vec{r}$ est différentiable pour tout $t \in I$, on dit que $\vec{r}$ est différentiable (sur I).*

1.5 Remarques

(a) Il est possible de montrer que le vecteur $\frac{d\vec{r}}{dt}(t)$ est un vecteur qui est tangent au graphe de la courbe décrite par $\vec{r}$ en $\vec{r}(t)$ (voir la figure 1).

(b) Si $\vec{r}$ est le vecteur donnant la position d'un corps (c'est-à-dire un vecteur lieu) en fonction du temps alors $\frac{d\vec{r}}{dt}$ est la vitesse $\vec{v}$ de ce corps et $\frac{d\vec{v}}{dt}$ son accélération.

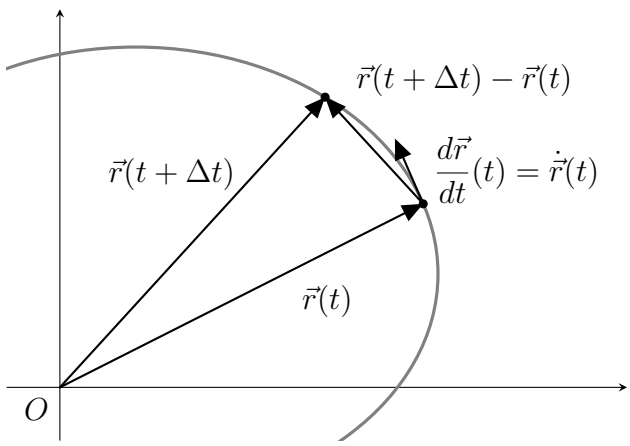


FIGURE 1 – interprétation géométrique de la dérivée vectorielle

Lorsque la dérivée se fait par rapport au temps, la notation suivante est souvent utilisée : $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Comme c'est le cas pour toutes les applications que nous traiterons, nous utiliserons généralement cette notation.

1.6 Propriété
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $t \in I$ et $\vec{r} = \left(\begin{smallmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{smallmatrix}\right) : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction. La fonction $\vec{r}$ est dérivable en t si et seulement si les fonctions r_x, r_y et r_z sont dérivables en t et nous avons

$$\boxed{\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}_x(t) \\ \dot{r}_y(t) \\ \dot{r}_z(t) \end{pmatrix}.}$$

Démonstration
Voir l'exercice 2. □

1.7 Théorème
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction différentiable.

(a) *La fonction $\vec{r}$ est continue sur I.*

(b) *La fonction $\vec{r}$ est constante si et seulement si $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{0}$ pour tout $t \in I$.*

Démonstration
Voir l'exercice 7. □

Nous avons les règles de dérivations suivantes :

1.8 Propriétés
Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et si $\vec{a}, \vec{b} : I \to \mathbb{R}^3$ et $\alpha : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables sur I alors

(a) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \pm \dot{\vec{b}}$

(b) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}$,

(c) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}$,

(d) $\frac{d}{dt}(\alpha \cdot \vec{a}) = \dot{\alpha} \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \dot{\vec{a}}$.

Démonstration
Les points (a) et (c) sont faits dans l'exercice 8, autres points sont à traiter comme exercice supplémentaire. □

Les résultats suivants sont des résultats généraux qui seront utilisés pour démontrer la première loi de Kepler :

1.9 Lemme
Soit $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $\vec{u} : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction différentiable. Si $\|\vec{u}(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$ alors

(a) *$\vec{u}$ est orthogonal $\dot{\vec{u}}$,*

(b) *$\vec{u} \times (\vec{u} \times \dot{\vec{u}}) = -\dot{\vec{u}}$.*

Démonstration
Voir l'exercice 9. □

Nous terminons cette section par la définition du travail d'un champ de force continue[1] $\vec{F}$ sur une courbe C parcourue selon un horaire dérivable $\vec{r}(t),\ t \in [a;b]$. Dans le cas où le champ de force est constant et la courbe rectiligne (voir la figure 2), le travail $A_C(\vec{F})$ se calcule avec un produit scalaire :

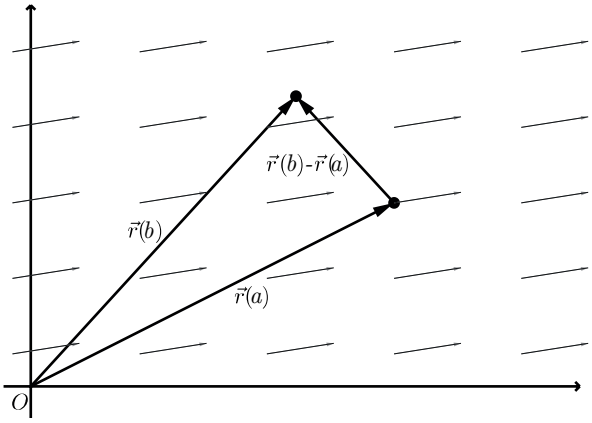


Figure 2 – travail d'un champ de force constant sur une trajectoire rectiligne

$$A_C(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \big(\vec{r}(b) - \vec{r}(a)\big).$$

Si la courbe n'est pas rectiligne ou si le champ de force n'est pas constant alors nous partitionnons l'intervalle I en n intervalles $I_k = [t_k; t_{k+1}],\ k = 0, 1, 2, \ldots n-1$ de longueur $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Si n est suffisamment grand, les intervalles ont alors une longueur Δt proche de 0 et nous pouvons considérer que la partie de la courbe parcourue durant chaque intervalle de temps I_k est approximativement rectiligne (voir la figure 3). Sous la même

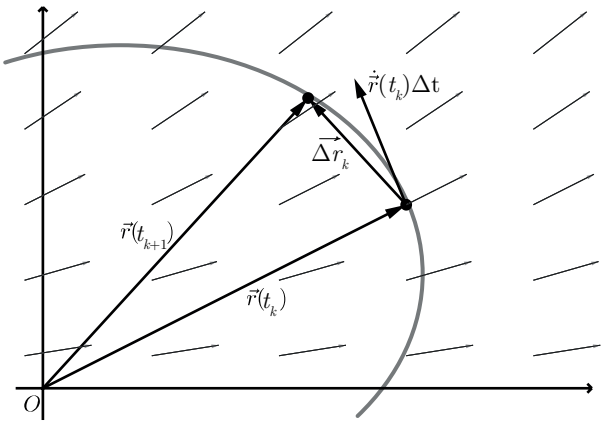


Figure 3 – travail d'un champ de force dans un cas général

1. Un champ vectorielle est continue si toutes ses composantes sont des fonctions continues

hypothèse, nous pouvons considérer que la force exercée sur chaque partie de courbe définie par $\vec{r}(t),\ t \in I_k$ est approximativement constante :

$$\vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \approx \vec{F}\big(\vec{r}(t_k)\big) \text{ pour } t \in I_k.$$

Remarquons que ces hypothèses sont d'autant meilleures que n est grand. Compte tenu de ces approximations, le travail de $\vec{F}$ sur chaque partie de trajectoire $\vec{r}(t),\ t \in I_k$ vaut environ

$$\vec{F}\big(\vec{r}(t_k)\big) \cdot \vec{\Delta r}_k \text{ avec } \vec{\Delta r}_k = \vec{r}(t_{k+1}) - \vec{r}(t_k).$$

De plus si n est grand (donc Δt est proche de 0), nous pouvons approximer $\vec{\Delta r}_k$ à l'aide de la vitesse $\vec{v}(t_k)$:

$$\vec{\Delta r}_k = \vec{r}(t_{k+1}) - \vec{r}(t_k) \approx \vec{v}(t_k) \cdot \Delta t = \dot{\vec{r}}(t_k) \cdot \Delta t,$$

où $\vec{v}(t),\ t \in I$ est la vitesse. Le travail de $\vec{F}$ sur chaque partie de trajectoire $\vec{r}(t),\ t \in I_k$, vaut donc approximativement :

$$\vec{F}\big(\vec{r}(t_k)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t_k) \cdot \Delta t.$$

Afin d'obtenir le travail du champ de force $\vec{F}$ sur l'ensemble de la trajectoire nous sommons les approximation des travaux obtenus sur chacune des parties puis faisons tendre n vers l'infini :

$$A_C(\vec{F}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}\big(\vec{r}(t_k)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t_k) \cdot \Delta t = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt.$$

Le développement que nous venons de faire motive alors les définition suivantes :

1.10 Définitions

Soit C une courbe définie par une fonction différentiable $\vec{r} : [a;b] \to \mathbb{R}^n,\ n \in \{1;2;3\}$, et $\vec{F}$ un champ vectorielle continue[2] *sur $\mathbb{R}^n$. L'**intégrale curviligne** de $\vec{F}$ le long de C se note $\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ et vaut*

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt}$$

*Dans le cas où $\vec{F}$ est un champ de force, cette intégrale est le **travail** de $\vec{F}$ sur C.*

1.11 Remarque

La définition précédente est aussi utilisable pour calculer le travail d'une force sur un chemin dans le cas où la force ne provient pas d'un champ. C'est le cas, par exemple, pour la force de frottement qui ne dépend pas de la position mais de la vitesse.

2. Un champ vectorielle est continue si chacune de ses composantes est continue.

2 Démonstration de la 1ère loi

Nous allons maintenant démontrer la première loi de Kepler. Pour cela, nous considérons un corps de masse m subissant comme unique force la force de gravitation exercée par un corps de masse M beaucoup plus grande que m. Nous pouvons donc considérer que M est immobile et nous choisissons le centre de M comme origine du repère orthonormé dans lequel nous allons travailler.

De plus, nous supposons que la force de gravitation et le vecteur vitesse de m ne sont jamais colinéaires. Si tel était le cas la trajectoire de m serait rectiligne et soit m s'écraserait sur M, soit m quitterait le champ de gravitation de M.

Nous donnons la position de m en fonction du temps à l'aide du vecteur lieu $\vec{r}$ et nous supposons $\vec{r}$ deux fois différentiable. La vitesse de m est donc $\frac{d\vec{r}}{dt}$ et son accélération $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Nous avons alors les définitions suivantes :

2.1 Définitions

(a) *La **quantité de mouvement** de m est le vecteur $\vec{p} = m\vec{v}$.*

(b) *Le **moment cinétique** de m est le vecteur $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.*

2.2 Remarque

Comme nous avons fait l'hypothèse que la force de gravitation et le vecteur vitesse de m ne sont jamais colinéaires, le moment cinétique $\vec{L}$ est toujours différent de $\vec{0}$.

Le corps m subit une force d'intensité $\frac{GMm}{r^2}$ dont la direction est donnée par le vecteur unitaire[3] $\vec{u} := \frac{\vec{r}}{r}$ et dont le sens est opposé à celui du $\vec{u}$. La deuxième loi de Newton nous donne alors l'équation différentielle vectorielle suivante :

$$\boxed{-\frac{GMm}{r^2} \cdot \vec{u} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Le résultat suivant découle directement de cette équation :

2.3 Théorème

Le moment cinétique $\vec{L}$ de m est constant et la trajectoire de m se trouve dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}$ contenant M.

Démonstration

Voir l'exercice 13. □

2.4 Propriété

Le vecteur $\vec{p} \times \vec{L} - GMm^2 \cdot \vec{u}$ est constant.

3. Afin d'alléger les notations, nous adopterons ici l'écriture utilisé en physique : la norme d'un vecteur $\vec{a}$ sera notée a.

Pour démontrer cette propriété, nous avons besoin du lemme suivant :

2.5 Lemme
$\vec{L} = mr^2 \cdot (\vec{u} \times \dot{\vec{u}})$

Démonstration
Comme $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$, nous avons $\vec{r} = r \cdot \vec{u}$ et donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\
&= (r \cdot \vec{u}) \times (m\dot{\vec{r}}) \\
&= mr \cdot (\vec{u} \times \dot{\vec{r}}) \\
&= mr \cdot \left(\vec{u} \times \frac{d}{dt}(r \cdot \vec{u})\right) \\
&= mr \cdot \left(\vec{u} \times (\dot{r} \cdot \vec{u} + r\dot{\vec{u}})\right) \\
&= mr \left(\underbrace{\vec{u} \times (\dot{r} \cdot \vec{u})}_{=0} + \vec{u} \times (r\dot{\vec{u}})\right) \\
&= mr^2 \cdot \left(\vec{u} \times \dot{\vec{u}}\right)
\end{aligned}$$

□

Démonstration (de la propriété 2.4)
Par le théorème 1.7, il faut montrer que la dérivée de $\vec{p} \times \vec{L} - GMm^2 \cdot \vec{u}$ vaut toujours $\vec{0}$. Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\vec{p} \times \vec{L} - GMm^2 \cdot \vec{u}\right) &= \dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \vec{p} \times \dot{\vec{L}} - GMm^2 \cdot \dot{\vec{u}} \\
&= \left(-\frac{GMm}{r^2} \cdot \vec{u}\right) \times \left(mr^2 \cdot (\vec{u} \times \dot{\vec{u}})\right) + \vec{p} \times \vec{0} - GMm^2 \cdot \dot{\vec{u}} \\
&= -GMm^2 \cdot \left(\vec{u} \times (\vec{u} \times \dot{\vec{u}})\right) - GMm^2 \cdot \dot{\vec{u}} \\
&= GMm^2 \cdot \dot{\vec{u}} - GMm^2 \cdot \dot{\vec{u}} \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

La deuxième égalité découle la deuxième loi de Newton, du lemme 2.5 et du théorème 2.3 tandis que l'avant dernière égalité est une conséquence du lemme 1.9(b). □

Posons $\vec{w} := \vec{p} \times \vec{L} - GMm^2 \cdot \vec{u}$ (nous venons de montrer que ce vecteur est constant). Si $\vec{w} \neq \vec{0}$, alors $\vec{w}$ est un vecteur directeur du plan perpendiculaire à $\vec{L}$ contenant M dans lequel se trouve la trajectoire de m car $\vec{p} \times \vec{L}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{L}$ et car $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ est toujours un vecteur directeur de ce plan. Nous pouvons donc choisir $\frac{\vec{w}}{w}$ comme premier vecteur de base du repère orthonormé $(M; \vec{i}; \vec{j})$ contenant la trajectoire de m. Si $\vec{w} = \vec{0}$, nous travaillons avec une base orthonormée quelconque $(\vec{i}; \vec{j})$. Dans le repère ainsi défini, nous avons alors le résultat suivant :

2.6 Propriété
Tout point de coordonnées $(x; y)$ de la trajectoire de m satisfait l'équation suivante :

$$L^2 = GMm^2\sqrt{x^2 + y^2} + wx.$$

Démonstration
Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} L^2 &= \vec{L}\cdot\vec{L} \\ &= \vec{L}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) \\ &= [\vec{L};\vec{r};\vec{p}] \\ &= [\vec{r};\vec{p};\vec{L}] \\ &= \vec{r}\cdot(\vec{p}\times\vec{L}) \\ &\underset{\text{déf. } \vec{w}}{=} \vec{r}\cdot(GMm^2\vec{u}+\vec{w}) \\ &= GMm^2(\vec{r}\cdot\vec{u})+\vec{r}\cdot\vec{w} \end{aligned}$$

Pour le premier terme, nous avons $\vec{r}\cdot\vec{u} = \vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = r = \sqrt{x^2+y^2}$. Pour calculer le second terme, nous remarquons que $\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} w \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{r} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ donc $\vec{r}\cdot\vec{w} = wx$. Nous avons alors

$$L^2 = GMm^2(\vec{r}\cdot\vec{u})+\vec{r}\cdot\vec{w} = GMm^2\sqrt{x^2+y^2}+wx.$$

□

2.7 Théorème
La trajectoire de m est sur une conique dont M est situé à un foyer. De plus, si l'énergie mécanique de m est ...

- *négative alors cette trajectoire est une ellipse.*
- *nulle alors cette trajectoire est une parabole.*
- *positive alors cette trajectoire est une hyperbole.*

Démonstration
Il est montré dans l'exercice 14 que la trajectoire de m est sur une conique d'axe focal dirigé par $\vec{i}$ dont M est situé à un foyer et dont la nature dépend du signe de $K := w^2 - G^2m^4M^2$: si $K > 0$, il s'agit d'une hyperbole, si $K = 0$ c'est une parabole et si $K < 0$ c'est une ellipse.

Pour mettre en relation la constante K et l'énergie mécanique, il nous faut déterminer la valeur de la constante w. Nous allons le faire lorsque le corps m se trouve à un sommet de la conique. A cet instant, le vecteur $\vec{p}$ est orthogonal au vecteur $\vec{r}$ et en utilisant l'égalité $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \vec{p}\times\vec{L} &= \vec{p}\times(\vec{r}\times\vec{p}) \\ &= (\vec{p}\cdot\vec{p})\cdot\vec{r} - (\vec{p}\cdot\vec{r})\cdot\vec{p} \qquad (1) \\ &= p^2\cdot\vec{r} - 0\cdot\vec{p} \\ &= p^2\cdot r\vec{u} \\ &= p^2 r\cdot\vec{u} \end{aligned}$$

Nous avons donc $\vec{w} := \vec{p} \times \vec{L} - GMm^2\vec{u} = p^2 r \cdot \vec{u} - GMm^2 \cdot \vec{u} = (p^2 r - GMm^2) \cdot \vec{u}$ ce qui nous donne les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} K = w^2 - m^4M^2G^2 &= (p^2r - GMm^2)^2 - m^4M^2G^2 \\ &= p^4r^2 - 2GMm^2p^2r \\ &= 2mp^2r^2\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r}\right) \\ &= 2mL^2\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r}\right). \end{aligned}$$

Il est démontré dans l'exercice 15 que le facteur entre parenthèse est l'énergie mécanique de m, ce qui termine la preuve. □

2.8 Corollaire (première loi de Kepler)
Les trajectoires des planètes autour du soleil sont des ellipses dont le soleil est situé à un des foyers.

Démonstration
Comme les planètes sont beaucoup plus légères que le soleil, tout le développement précédent est applicable et, par le théorème précédent, les trajectoires des planètes autour du soleil sont sur des coniques dont le soleil est un foyer. De plus, la seule conique permettant un mouvement périodique est l'ellipse. □

3 Démonstration de la 2e loi

Pour démontrer la deuxième loi de Kepler, nous avons besoin d'une méthode permettant de calculer l'aire balayée par le vecteur position d'une trajectoire plane durant un intervalle de temps donné. C'est ce que fait le résultat suivant :

3.1 Théorème

Soit I un intervalle ouvert, $a, b \in I$ avec $a < b$ et $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^2$ le vecteur position d'une trajectoire. Si $\vec{r}$ est différentiable alors l'aire A balayée par $\vec{r}$ durant l'intervalle de temps $[a; b]$ vaut

$$\boxed{A = \int_a^b \frac{1}{2} \|\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)\| dt,}$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse correspondant à la trajectoire.

Démonstration

Nous commençons par diviser l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de $[t_k; t_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, n$, de longueur $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Durant un intervalle $[t_k; t_{k+1}] = [t_k; t_k + \Delta t]$, l'aire balayée par $\vec{r}$ correspond approximativement à l'aire A_k du triangle défini par $\vec{r}(t_k)$ et $\vec{r}(t_k + \Delta t)$ (voir le figure 4). L'aire A à calculer est alors estimable en sommant les aires de ces triangles.

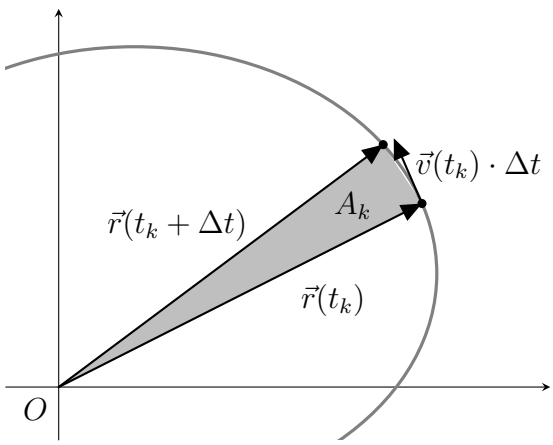


Figure 4 – estimation de l'aire balayée par un vecteur position durant Δt

Nous

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} A_k. \tag{2}$$

où l'aire d'un de ces triangles vaut

$$A_k = \frac{1}{2} \|\vec{r}(t_k) \times \vec{r}(t_k + \Delta t)\|. \tag{3}$$

En faisant un développement de Taylor d'ordre 1 autour de t_k des composantes de $\vec{r}$ nous obtenons

$$\vec{r}(t_k + \Delta t) \approx \vec{r}(t_k) + \dot{\vec{r}}(t_k) \cdot \Delta t = \vec{r}(t_k) + \vec{v}(t_k) \cdot \Delta t, \tag{4}$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse correspondant à la trajectoire. En insérant l'équation (4) dans l'équation (3), nous obtenons l'approximation

$$\begin{aligned} A_k &\approx \frac{1}{2}\left\|\vec{r}(t_k) \times \left(\vec{r}(t_k) + \vec{v}(t_k) \cdot \Delta t\right)\right\| \\ &= \frac{1}{2}\|\underbrace{\vec{r}(t_k) \times \vec{r}(t_k)}_{=\vec{0}} + \vec{r}(t_k) \times \vec{v}(t_k) \cdot \Delta t\| \\ &= \frac{1}{2}\|\vec{r}(t_k) \times \vec{v}(t_k)\| \cdot \Delta t. \end{aligned} \tag{5}$$

Cette approximation est d'autant meilleure que Δt est proche de 0, ce qui est le cas lorsque n augmente. En insérant l'équation (5) dans l'équation (2) nous obtenons alors

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\|\vec{r}(t_k) \times \vec{v}(t_k)\| \cdot \Delta t = \int_a^b \frac{1}{2}\|\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)\| dt.$$

□

3.2 Théorème (deuxième loi de Kepler)
La vitesse aréolaire des planètes autour du soleil, c'est-à-dire l'aire balayée par unité de temps par leur vecteur soleil-planète, est constante et vaut $\frac{L}{2m}$, où L est la norme du moment cinétique de la planète et m sa masse.

Démonstration
Nous considérons une planète, fixons arbitrairement un instant $t = 0$ et définissons pour $t \geqslant 0$ la fonction

$$A(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\|\vec{r}(\tau) \times \vec{v}(\tau)\| d\tau$$

qui donne l'aire balayée par le vecteur soleil-planète durant l'intervalle de temps $[0; t]$. Comme le moment cinétique $\vec{L}$ de la planète est constant (théorème 2.3), nous avons les égalités suivantes :

$$A(t) = \int_0^t \frac{1}{2m}\|\underbrace{\vec{r}(\tau) \times m\vec{v}(\tau)}_{=\vec{L}}\| d\tau = \int_0^t \frac{L}{2m} d\tau = \frac{L}{2m} t.$$

La vitesse aréolaire étant la dérivée de A par rapport au temps celle-ci vaut alors

$$\dot{A}(t) = \frac{L}{2m}$$

et est donc constante. □

3.3 Remarque
En examinant la preuve de la deuxième loi de Kepler, nous constatons que le résultat est généralisable à n'importe quel corps de masse m qui subit comme unique force la force de gravitation exercée pas un corps de masse M nettement plus importante et dont le moment cinétique est non-nul.

4 Démonstration de la 3e loi

4.1 Théorème (troisième loi de Kepler)
Le carré de la période de révolution des planètes autour du soleil est proportionnel au cube de la longueur du grand axe de la trajectoire.

Démonstration
Notons G la constante de gravitation universelle, M la masse du soleil, T la période de révolution d'une planète autour du soleil, m la masse de celle-ci et L la norme de son moment cinétique. Durant une période de révolution le vecteur soleil-planète balaye une surface

$$A = \frac{L}{2m} \cdot T \tag{6}$$

car la vitesse aréolaire de m vaut $\frac{L}{2m}$ (théorème 3.2). D'autre part, comme la trajectoire de la planète est une ellipse, nous avons $A = \pi ab$, où a et b sont les dimensions des demi-axes (ce résultat se trouve dans le formulaire et est démontré dans l'exercice 16). Il a été démontré dans l'exercice 14 qui la dimension du demi-grand axe vaut

$$a = \sqrt{\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2 - w^2)^2}} = \frac{L^2\alpha}{\alpha^2 - w^2}$$

et celle du demi-petit axe

$$b = \sqrt{\frac{L^4}{\alpha^2 - w^2}} = \sqrt{\frac{L^2\alpha}{\alpha^2 - w^2} \cdot \frac{L^2}{\alpha}} = \sqrt{a \cdot \frac{L^2}{\alpha}} = \sqrt{\frac{a}{\alpha}} \cdot L,$$

où α et w sont des constantes, en particulier $\alpha = GMm^2$ et $\alpha^2 - w^2 > 0$. La formule du calcul de l'aire d'une ellipse nous donne alors

$$A = \pi ab = \pi a\sqrt{\frac{a}{\alpha}} \cdot L = \sqrt{\frac{a^3}{\alpha}} \cdot \pi L. \tag{7}$$

En égalant les équations (6) et (7) nous obtenons les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{LT}{2m} &= \sqrt{\frac{a^3}{\alpha}} \cdot \pi L \\
T &= \sqrt{\frac{a^3}{\alpha}} \cdot 2m\pi \\
T^2 &= \frac{4m^2\pi^2}{\alpha} \cdot a^3 \\
&= \frac{4m^2\pi^2}{GMm^2} \cdot a^3 \\
&= \frac{\pi^2}{2GM} \cdot (2a)^3.
\end{aligned}$$

Le carré de la période de révolution est donc proportionnelle au cube de la longueur du grand axe. □

5 Exercices

***Exercice* 1 (sans Mathematica)**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $t_0 \in I$ et $\vec{a}, \vec{b} : I \to \mathbb{R}^3$ des fonctions.

(a) Montrer que $\vec{a}$ est continue en t_0 si et seulement si $a_x,\ a_y$ et a_z sont continues en t_0, où $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{smallmatrix}\right)$

(b) Montrer que si les limites $\lim_{t\to t_0} \vec{a}(t)$ et $\lim_{t\to t_0} \vec{b}(t)$ existent et donnent des vecteurs de composantes finies alors $\lim_{t\to t_0} \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t) = (\lim_{t\to t_0} \vec{a}(t)) \cdot \left(\lim_{t\to t_0} \vec{b}(t)\right)$.

***Exercice* 2 (sans Mathematica)**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $t \in I$ et $\vec{r} = \left(\begin{smallmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{smallmatrix}\right) : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction.

(a) Montrer que $\vec{r}$ est dérivable en t si et seulement si r_x, r_y et r_z sont dérivables en t.

(b) Montrer que si $\vec{r}$ est dérivable sur I alors $\dot{\vec{r}} = \left(\begin{smallmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{smallmatrix}\right)$.

***Exercice* 3 (sans Mathematica)**
Un point matériel suit un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω dont la trajectoire est centré en $C(C_x; C_y)$ et a un rayon R.

(a) Déterminer l'horaire $\vec{r}(t)$ de ce point matériel s'il se trouve en $(C_x + R; C_y)$ au temps $t = 0$.

(b) Calculer v la norme de la vitesse instantanée du point matériel.

(c) Calculer la norme de l'accélération en fonction de v et R.

(d) Montrer que le vecteur vitesse est toujours perpendiculaire au vecteur accélération.

***Exercice* 4 (sans Mathematica)**
Soit I un intervalle ouvert et $\vec{a} : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction dérivable. L'égalité suivante est-elle correcte :

$$\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| \stackrel{?}{=} \frac{d}{dt} \|\vec{r}(t)\|$$

***Exercice* 5 (avec Mathematica)**
Nous considérons l'ellipse centrée à l'origine dont l'axe focal est horizontal, de distance focale de 10 unités et de petit axe mesurant 6 unités.

(a) Déterminer des équations paramétriques de cette ellipse.

(b) Déterminer l'équation de la tangente à cette ellipse au point du premier quadrant d'abscisse 4.

***Exercice* 6 (sans Mathematica)**
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*, a > b$ et considérons l'ellipse centrée à l'origine, d'axe focal horizontal et dont les demi-axes mesurent a et b. En travaillant avec les équations paramétriques de l'ellipse, montrer que la normale à la tangente à cette ellipse en n'importe quel point P est la bissectrice de l'angle $\widehat{FPF'}$, où F, F' sont les foyers de l'ellipse.

***Exercice* 7 (sans Mathematica)**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction différentiable. Montrer que la fonction $\vec{r}$ est ...

(a) ... continue sur I.

(b) ... constante si et seulement si $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{0}$ pour tout $t \in I$.

***Exercice* 8 (sans Mathematica)**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\vec{a}, \vec{b} : I \to \mathbb{R}^3$ des fonctions différentiables. Démontrer les règles de dérivation suivantes :

(a) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \pm \dot{\vec{b}}$

(b) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}$,

***Exercice* 9 (sans Mathematica)**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $\vec{u} : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction différentiable. Montrer que si $\|\vec{u}(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$ alors ...

(a) ... $\vec{u}(t)$ est orthogonal à $\dot{\vec{u}}(t)$ pour tout $t \in I$. Indication : dériver $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

(b) ... $\vec{u} \times (\vec{u} \times \dot{\vec{u}}) = -\dot{\vec{u}}$.

***Exercice* 10 (sans Mathematica)**
Déduire de la première partie de l'exercice précédent que l'accélération d'un mobile est la combinaison linéaire d'un vecteur qui est colinéaire à la vitesse $\vec{v}$ et qui a une norme $\frac{dv}{dt}$ et d'un vecteur qui est orthogonal à celui-ci (le premier vecteur est l'accélération tangentielle et le second l'accélération normale). Indication : poser $\vec{v} = v \cdot \vec{u}$ avec $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{v}$.

***Exercice* 11 (sans et avec Mathematica)**
Soit le champ de force (en Newton)

$$\vec{F}(x, y) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \ (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

avec x, y en mètre.

(a) Représenter avec Mathematica le champ de force $\vec{F}$ pour $x, y \in [-2; 2]$.

(b) Sans calcul, déterminer le signe du travail de $\vec{F}$ ...

  (i) sur le cercle centré à l'origine de rayon 1 parcouru une fois dans le sens des aiguilles de la montre en 2 secondes.

  (ii) en allant de $(2; -2)$ à $(2; 2)$ en ligne droite en 10 secondes.

  (iii) allant de $(0; 0)$ à $(2; 2)$ en ligne droite en 1 seconde.

(c) Calculer à la main le trois travaux précédents.

(d) Vérifier les résultats précédent avec Mathematica en soignant le code (une modification d'une donnée doit automatiquement se reporter sur l'ensemble du cahier lors d'une réévaluation de celui-ci).

***Exercice* 12 (sans Mathematica)**
Soit C une courbe parcourue par un point matériel de masse m selon l'horaire $\vec{r} : [t_1; t_2] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}$ la vitesse du point matériel en fonction du temps et $\vec{a}$ son accélération. Nous notons $\vec{F}\big(\vec{r}(t)\big)$ la résultante des forces que subit le point matériel en position $\vec{r}(t)$.

(a) Montrer que v^2 et une primitive de $2\vec{a} \cdot \vec{v}$.

(b) En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que le travail de la résultante des forces sur la courbe C est égale à la différence d'énergie cinétique entre le point d'arrivée et le point de départ du point matériel.

Tous les exercices suivants se réfèrent au cadre posé la section 2 et les suivantes. Ils reprennent les notations utilisées dans celles-ci.

***Exercice* 13 (sans Mathematica)**

(a) Montrer que le moment cinétique $\vec{L}$ de m est constant.

(b) Montrer que la trajectoire de m se trouve dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}$ contenant M.

***Exercice* 14 (sans Mathematica)**
Déduire de la propriété 2.6 que la trajectoire de m est sur une conique d'axe focal dirigé par $\vec{i}$ dont M est situé à un foyer et dont la nature dépend du signe de $K := w^2 - G^2m^4M^2$: si $K > 0$, il s'agit d'une hyperbole, si $K = 0$ c'est une parabole et si $K < 0$ c'est une ellipse.

***Exercice* 15 (sans Mathematica)**
A l'aide du calcul intégral, calculer l'énergie potentielle de m et en déduire que l'énergie mécanique de m vaut $\frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r}$.
Indication : pour le calcul de l'énergie potentielle, simplifier le problème en considérant que m est déplacée en suivant l'axe O_x avec un horaire $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} r+t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0; +\infty[$.

***Exercice* 16 (sans Mathematica)**
Démontrer à l'aide du théorème 3.1 que l'aire d'une ellipse dont les axes mesurent $2a$ et $2b$ vaut πab.

6 Réponses des exercices

3

(a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} C_x + R\cos(\omega t) \\ C_y + R\sin(\omega t) \end{pmatrix}$

(b) $v = |\omega| R$

(c) $\frac{v^2}{R}$

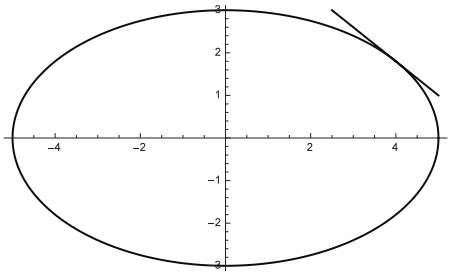
4 $\left\| \dot{\vec{r}}(t) \right\| \neq \frac{d}{dt} \left\| \vec{r}(t) \right\|$

5

(a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$

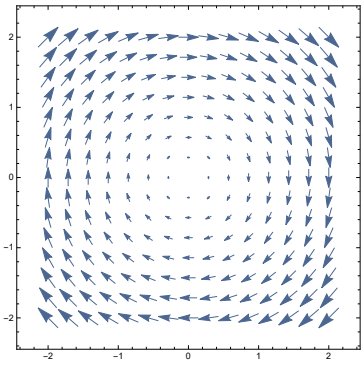
(b) $4x + 5y - 25 = 0$

(c)



11

(a)



(b) postif, négatif, nul

(c) $0.63\,\mathrm{J},\ -0.8\,\mathrm{J}, 0\,\mathrm{J}$

Corrigés

***Corrigé de l'exercice* 1**

(a) Nous devons démontrer l'équivalence de deux affirmations. Nous avons ici la possibilité de passer d'une affirmation à l'autre par une série d'équivalences, ce qui démontrera l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\vec{a} \text{ continue en } t_0 &\Longleftrightarrow \lim_{t\to t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}\,(t_0) && \text{(déf. continuité)}\\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lim_{t\to t_0} a_x(t) \\ \lim_{t\to t_0} a_y(t) \\ \lim_{t\to t_0} a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x\,(t_0) \\ a_y\,(t_0) \\ a_z\,(t_0) \end{pmatrix} && \text{(déf. limite)}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{t\to t_0} a_x(t) = a_x(t_0) \\ \lim_{t\to t_0} a_y(t) = a_y(t_0) \\ \lim_{t\to t_0} a_z(t) = a_z(t_) \end{cases} && \text{(déf. égalité vecteurs)}\\
&\Longleftrightarrow a_x,\ a_y,\ a_z \text{ continues} && \text{(déf. continuité)}
\end{aligned}$$

□

(b) **Hypothèse** $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{a}(t)$ et $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{b}(t)$ existent et donnent des vecteurs de composantes finies .

A montrer $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t) = \left(\lim\limits_{t\to t_0} \vec{a}(t)\right)\cdot\left(\lim\limits_{t\to t_0} \vec{b}(t)\right)$

Preuve Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0} \vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t) &= \lim_{t\to t_0} \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x(t) \\ b_y(t) \\ b_z(t) \end{pmatrix} && \text{(déf. } \vec{a} \text{ et } \vec{b}\text{)}\\
&= \lim_{t\to t_0} a_x(t)b_x(t) + a_y(t)b_y(t) + a_z(t)b_z(t) && \text{(déf. produit scalaire)}\\
&= \left(\lim_{t\to t_0} a_x(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} b_x(t)\right) + \left(\lim_{t\to t_0} a_y(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} b_y(t)\right)\\
&\quad + \left(\lim_{t\to t_0} a_z(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} b_z(t)\right) && \text{(propr. limite et hypothèse)}\\
&= \begin{pmatrix} \lim_{t\to b_0} a_x(t) \\ \lim_{t\to t_0} a_y(t) \\ \lim_{t\to t_0} a_z(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lim_{t\to t_0} b_x(t) \\ \lim_{t\to t_0} b_y(t) \\ \lim_{t\to t_0} b_z(t) \end{pmatrix} && \text{(déf. produit scalaire)}\\
&= \left(\lim_{t\to t_0} \vec{a}(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\to t_0} \vec{b}(t)\right) && \text{(déf. limite)}
\end{aligned}$$

□

***Corrigé de l'exercice* 2**

(a) Nous devons démontrer l'équivalence de deux affirmations. Nous avons ici la possibilité de passer d'une affirmation à l'autre par une série d'équivalences, ce qui démontrera l'énoncé.

La fonction $\vec{r}$ est dérivable en t si seulement si la limite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

existe et donne un vecteur de composantes finies. Par définition des opérations sur les vecteurs et par définition de la limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \begin{pmatrix} \frac{r_x(t+\Delta t)-r_x(t)}{\Delta t} \\ \frac{r_y(t+\Delta t)-r_y(t)}{\Delta t} \\ \frac{r_z(t+\Delta t)-r_z(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_x(t+\Delta t)-r_x(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_y(t+\Delta t)-r_y(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_z(t+\Delta t)-r_z(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

Il s'en suit que $\vec{r}$ est dérivable en t si et seulement si les limites

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_x(t+\Delta t) - r_x(t)}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_y(t+\Delta t) - r_y(t)}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_z(t+\Delta t) - r_z(t)}{\Delta t}$$

existent et sont finies, c'est-à-dire si et seulement si r_x, r_y, r_z sont dérivables en t.

□

(b) **Hypothèse** La fonction $\vec{r}$ est dérivable en t

A montrer $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}_x\ (t) \\ \dot{r}_y\ (t) \\ \dot{r}_z\ (t) \end{pmatrix}$

Preuve

Si $\vec{r}$ est dérivable en t, la première expression de la suite d'égalités (8) est égal $\dot{\vec{r}}(t)$ et la dernière est égale à $\begin{pmatrix} \dot{r}_x\ (t) \\ \dot{r}_y\ (t) \\ \dot{r}_z\ (t) \end{pmatrix}$. Nous avons donc

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}_x & (t) \\ \dot{r}_y & (t) \\ \dot{r}_z & (t) \end{pmatrix}.$$

□

***Corrigé de l'exercice* 3**

(a) Un point matériel qui suit un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω et de rayon R fait un rotation ωt durant un temps t. Si le centre de rotation est l'origine les coordonnées polaire du point sont $(R\angle\omega t)$ et ses coordonnées cartésiennes

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(wt) \\ R\sin(wt) \end{pmatrix}$$

Si le centre de rotation n'est pas l'orgine mais $C(C_x; C_y)$ ses coordonnées cartésiennes sont alors

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} C_x + R\cos(wt) \\ C_y + R\sin(wt) \end{pmatrix}$$

La figure 5 illustre la situation.

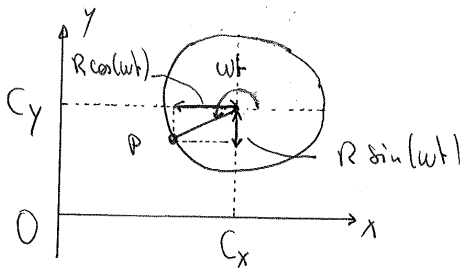


FIGURE 5 – coordonnées d'un point avec un mouvement circulaire uniforme

(b) Nous commençons par calculer les composantes du vecteur vitesse :

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(\omega t)\cdot\omega \\ R\cos(\omega t)\cdot\omega \end{pmatrix}$$

La norme de la vitesse vaut alors

$$\begin{aligned} v = \|\dot{\vec{r}}(t)\| &= \sqrt{R^2\sin^2(\omega t)\omega^2 + R^2\cos^2(\omega t)\omega^2} \\ &= \sqrt{R^2\omega^2\left(sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)} \\ &= \sqrt{R^2\omega^2\cdot 1} \\ &= R|\omega|. \end{aligned}$$

(c) Nous commençons par calculer les composantes du vecteur accélération :

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R & \cos(\omega t)\omega^2 \\ -R & \sin(\omega t)\omega^2 \end{pmatrix}$$

La norme de l'accélération vaut alors

$$\begin{aligned} \|\ddot{\vec{r}}(t)\| &= \sqrt{R^2\cos^2(\omega t)\omega^4 + R^2\sin^2(\omega t)\omega^4} \\ &= \sqrt{R^2\omega^4\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)} \\ &= \sqrt{R^2\omega^4\cdot 1} \\ &= R\omega^2 \\ &\underset{(b)}{=} R\left(\frac{v}{R}\right)^2 \\ &= \frac{v^2}{R}. \end{aligned}$$

(d) **A montrer** $\dot{\vec{r}}(t)\cdot\ddot{\vec{r}}(t) = 0$

Preuve Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t)\cdot\ddot{\vec{r}}(t) &= \begin{pmatrix} -R & \sin(\omega t)\omega \\ R & \cos(\omega t)\omega \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -R & \cos(\omega t)\omega^2 \\ -R & \sin(\omega t)\omega^2 \end{pmatrix} \\ &= R^2\omega^2\sin(\omega t)\,\mathrm{co}(\omega t) - R^2\omega^2\sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

***Corrigé de l'exercice* 4**
Discussion en classe...

***Corrigé de l'exercice* 5**
Nous commençons par définir le vecteur lieu puis nous calculons les coordonnées du point de tangence :

In[1]:=
```
a = 5; b = 3; abs = 4;
r[t_] := {a Cos [t], b Sin[t]}
t0 = t/.
  (Solve[r[t][[1]] == abs && 0 < t < Pi/2, t])[[1]]
pt = r[t0]
```

Out[1]= ArcCos[4/5]

Out[2]= {4, 9/5}

Le vecteur tangent étant un vecteur directeur de la tangente, nous pouvons alors calculer l'équation de la tangente :

In[3]:=
```
v[t_] := D[r[s], s] /. {s -> t}
tangente[x_, y_] :=
  -v[t0][[2]] x + v[t0][[1]] y + c == 0
valc = Solve[tangente [x, y] /.
  {x -> pt[[1]], y -> pt[[2]]}, c]
```

Out[3]= {{c -> 15}}

L'équation de la tangente est alors :

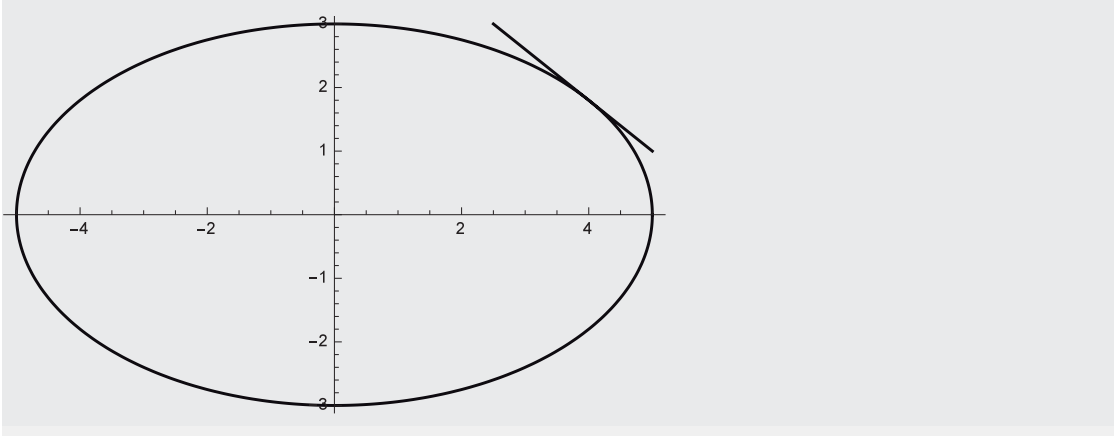
In[4]:=
```
tangente[x, y] /. valc
```

Out[4]= 15 - (12 x)/5 - 3 y == 0

Nous avons donc finalement la situation suivante :

In[5]:=
```
Show[
 {ContourPlot[
    Evaluate[tangente[x, y] /. valc],
    {x, -a, a}, {y, -b, b}
  ],
  ParametricPlot[r[t], {t, 0, 2 Pi}]
  },
  AspectRatio -> Automatic, Axes -> True,
  Frame -> False
 ]
```

Out[5]=



***Corrigé de l'exercice* 6**

Hypothèse Un point P appartient à une ellipse centrée à l'origine, d'axe focal horizontal et dont les demi-axes mesurent a et b.

A montrer La normale à la tangente en P à cette ellipse est la bissectrice de l'angle $\widehat{FPF'}$, où F, F' sont les foyers de l'ellipse.

Preuve Les coordonnées des foyers de l'ellipse considérée sont

$$F(c;0) \text{ et } F'(-c;0) \text{ avec } c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{9}$$

et $\vec{r}(t) = \left(\begin{smallmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{smallmatrix}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, est paramétrisation de celle-ci. Comme P appartient à l'ellipse, il existe un nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t)$, où O est l'origine du repère. Notons $\vec{n}$ un vecteur directeur de la normale à l'ellipse en P. Nous devons alors montrer que $\angle(\overrightarrow{PF}, \vec{n}) = \angle(\vec{n}, \overrightarrow{PF'})$, ou, de façon équivalente, que $\cos\big(\angle(\overrightarrow{PF}, \vec{n})\big) - \cos\big(\angle(\vec{n}, \overrightarrow{PF'})\big) = 0$, c'est-à-dire que

$$\frac{\overrightarrow{PF} \cdot \vec{n}}{\|\overrightarrow{PF}\| \cdot \|\vec{n}\|} - \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PF'}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\overrightarrow{PF'}\|} = 0. \tag{10}$$

Comme $\dot{\vec{r}}(t) = \left(\begin{smallmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur directeur de la tangente à l'ellipse, nous pouvons choisir $\vec{n} = \left(\begin{smallmatrix} b\cos(t) \\ a\sin(t) \end{smallmatrix}\right)$ comme vecteur directeur de la normale. Nous pouvons maintenant calculer $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{n}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PF} \cdot \vec{n} &= \begin{pmatrix} c - a\cos(t) \\ -b\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b\cos(t) \\ a\sin(t) \end{pmatrix} \\
&= bc\cos(t) - ab\cos^2(t) - ab\sin^2(t) \\
&= bc\cos(t) - ab\big(\cos^2(t) + \sin^2(t)\big) \\
&= bc\cos(t) - ab \\
&= b\big(c\cos(t) - a\big)
\end{aligned} \tag{11}$$

De façon analogue, nous trouvons

$$\overrightarrow{PF'} \cdot \vec{n} = b\big(-c\cos(t) - a\big). \tag{12}$$

Nous calculons maintenant la norme de $\overrightarrow{PF}$:

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{PF}\| &= \sqrt{\big(c - a\cos(t)\big)^2 + \big(-b\sin(t)\big)^2} \\
&= \sqrt{c^2 - 2ac\cos(t) + a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} \\
&\underset{b^2=a^2-c^2}{=} \sqrt{c^2\big(1-\sin^2(t)\big) - 2ac\cos(t) + a^2\big(\cos^2(t)+\sin^2(t)\big)} \\
&= \sqrt{c^2\cos^2(t) - 2ac\cos(t) + a^2} \\
&= \sqrt{\big(c\cos(t) - a\big)^2} \\
&= \big|c\cos(t) - a\big| \\
&\underset{a>c}{=} a - c\cos(t) \qquad (13)
\end{aligned}$$

De façon analogue, nous trouvons $\|\overrightarrow{PF'}\| = \big|c\cos(t) + a\big|$ et donc, comme $a > c$, nous avons

$$\|\overrightarrow{PF'}\| = c\cos(t) + a. \qquad (14)$$

En utilisant les équations (11), (12), (13) et (14) nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{PF}\cdot\vec{n}}{\|\overrightarrow{PF}\|\cdot\|\vec{n}\|} - \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF'}}{\|\vec{n}\|\cdot\|\overrightarrow{PF'}\|} &= \frac{b\big(c\cos(t)-a\big)}{\big(a-c\cos(t)\big)\cdot\|\vec{n}\|} - \frac{b\big(-c\cos(t)-a\big)}{\|\vec{n}\|\cdot\big(c\cos(t)+a\big)} \\
&= \frac{-b}{\|\vec{n}\|} - \frac{-b}{\|\vec{n}\|} = 0,
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'égalité (10).

□

Corrigé de l'exercice 7

Posons $\vec{r} = \left(\begin{smallmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{smallmatrix}\right)$.

(a) **Hyphothèse** La fonction $\vec{r}$ est différentiable sur I.

A montrer La fonction $\vec{r}$ est continue sur I, c'est-à-dire $\lim_{t\to t_0} r(t) = \vec{r}(t_0)$ pour tout $t_0 \in I$.

Preuve Rappelons tout d'abord le résultat suivant du cours de mathématiques : si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est différentiable sur I alors elle est continue sur I. Il suit de l'hypothèse et de la propriété 1.6 que les fonctions r_x, r_y et r_z sont différentiables sur I et donc, par le résultat que nous venons de rappeler, qu'elles sont continues sur I. Nous avons alors les égalités suivantes pour tout $t_0 \in I$:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0} r(t) &= \begin{pmatrix} \lim_{t\to t_0} r_x(t) \\ \lim_{t\to t_0} r_y(t) \\ \lim_{t\to t_0} r_z(t) \end{pmatrix} && \text{(définition limite)} \\
&= \begin{pmatrix} r_x(t_0) \\ r_y(t_0) \\ r_z(t_0) \end{pmatrix} && \text{(différentiabilité de } r_x,\ r_y,\ r_z) \\
&= \vec{r}(t_0) && \text{(définition } \vec{r})
\end{aligned}$$

□

(b) Nous devons démontrer l'équivalence de deux affirmations. Nous avons ici la possibilité de passer d'une affirmation à l'autre par une série d'équivalences, ce qui démontrera l'énoncé.

Rappelons tout d'abord l'énoncé suivant du cours de mathématiques qui est valable pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui est dérivable sur I :

$$f \text{ est consante} \iff \dot{f}(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Nous démontrons maintenant l'énoncé donné :

$$\begin{aligned}
\vec{r} \text{ constante} &\iff r_x, r_y, r_z \text{ constantes} && \text{(déf. fonction const.)}\\
&\iff \dot{r}_x(t) = \dot{r}_y(t) = \dot{r}_z(t) = 0 \quad \forall t \in I && \text{(rappel précédent)}\\
&\iff \dot{\vec{r}}(t) = \vec{0} \quad \forall t \in I && \text{(déf. } \vec{r}\text{)}
\end{aligned}$$

□

***Corrigé de l'exercice* 8**

Soit $t \in I$.

(a) **Hypothèse** Les fonctions $\vec{a}$ sont différentiables.

A montrer $\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}}$

Preuve Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b})(t) = \\
&\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\vec{a} + \vec{b})(t + \Delta t) - (\vec{a} + \vec{b})(t)}{\Delta t} = && \text{(définition dérivée)}\\
&\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) + \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{a}(t) - \vec{b}(t)}{\Delta t} = && \text{(définition } (\vec{a} + \vec{b})(t))\\
&\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t)}{\Delta t} = && \text{(calcul algébrique)}\\
&\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t)}{\Delta t} = && \text{(propriété limites)}\\
&\dot{\vec{a}}(t) + \dot{\vec{b}}(t) = && \text{(définition dérivée)}\\
&(\dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}})(t) && \text{(définition } (\dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}})(t))
\end{aligned}$$

□

Preuve analogue pour $\frac{d}{dt}(\vec{a} - \vec{b})$.

Remarquons qu'il est aussi possible de démontrer ces deux règles de dérivation en travaillant avec la propriété 1.6 et les règles de dérivation des fonctions réelles.

(b) **Hypothèse** Les fonctions $\vec{a}$ sont différentiables.

A montrer $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}$,

Preuve Nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})(t) =$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\vec{a}\times\vec{b})(t+\Delta t)-(\vec{a}\times\vec{b})(t)}{\Delta t} = \qquad \text{(déf. dérivée)}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)\times\vec{b}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)}{\Delta t} = \qquad \text{(déf. } (\vec{a}\times\vec{b})(t))$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)\times\vec{b}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)\times\vec{b}(t+\Delta t)+\vec{a}(t)\times\vec{b}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)}{\Delta t} = \qquad \text{(astuce !)}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}\times\vec{b}(t+\Delta t)+\vec{a}(t)\times\frac{\vec{b}(t+\Delta t)-\vec{b}(t)}{\Delta t} = \qquad \text{(calcul algébrique)}$$

$$\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}\right)\times\left(\lim_{\Delta t\to 0}\vec{b}(t+\Delta t)\right)+\vec{a}(t)\times\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{b}(t+\Delta t)-\vec{b}(t)}{\Delta t}\right) = \qquad \text{(propriété limites)}$$

$$\dot{\vec{a}}(t)\times\vec{b}(t)+\vec{a}(t)\times\dot{\vec{b}}(t) = \qquad \text{(déf. dérivée, conti. de } \vec{a}\text{)}$$

$$(\dot{\vec{a}}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dot{\vec{b}})(t) \qquad \text{(déf. } \dot{\vec{a}}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dot{\vec{b}})$$

□

***Corrigé de l'exercice* 9**

(a) **Hypothèse** $\|\vec{u}(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$

A montrer $\vec{u}(t)$ est orthogonal à $\dot{\vec{u}}(t)$ pour tout $t \in I$, c'est-à-dire $\vec{u}(t)\cdot\dot{\vec{u}}(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Preuve D'une part, nous avons $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 1$ donc

$$\frac{d}{dt}\vec{u}\cdot\vec{u} = 0.$$

D'autre part, en utilisant la règle de dérivations d'un produit scalaire, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{u}) = \dot{\vec{u}}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\dot{\vec{u}} = 2\vec{u}\cdot\dot{\vec{u}}.$$

II s'en suit de ces deux égalités que $\vec{u}\cdot\dot{\vec{u}} = 0$.

□

(b) **Hypothèse** $\|\vec{u}(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$

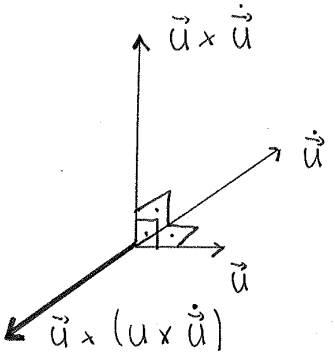
A montrer $\vec{u}\times(\vec{u}\times\dot{\vec{u}}) = -\dot{\vec{u}}$

Preuve Rappelons la relation suivante (voir formulaire) : $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$. Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\times(\vec{u}\times\dot{\vec{u}}) &= (\vec{u}\cdot\dot{\vec{u}})\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{u})\dot{\vec{u}} && \text{(rappel précédent)}\\
&= 0\cdot\vec{u}-\|\vec{u}\|^2\cdot\dot{\vec{u}} && \text{(partie (a))}\\
&= \vec{0}-1\cdot\dot{\vec{u}} && \text{(propr. multiplication par 0, hyp.)}\\
&= -\dot{\vec{u}} && \text{(calcul vectoriel)}
\end{aligned}$$

□

Autre preuve L'orthogonalité de $\vec{u}$ et $\dot{\vec{u}}$ démontrée dans la partie (a), nous donne le croquis suivant :



D'une part, nous constatons que le vecteur $\vec{u} \times (\vec{u} \times \dot{\vec{u}})$ a la même direction que $\dot{\vec{u}}$ mais le sens opposé. D'autre part nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \times (\vec{u} \times \dot{\vec{u}})\| &= \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cdot \|\vec{u} \times \dot{\vec{u}}\| \sin\big(\underbrace{\angle(\vec{u}; \vec{u} \times \dot{\vec{u}})}_{=90^\circ}\big) \\
&= \|\vec{u} \times \dot{\vec{u}}\| \\
&= \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cdot \|\dot{\vec{u}}\| \sin\big(\underbrace{\angle(\vec{u}; \dot{\vec{u}})}_{=90^\circ}\big) \\
&= \|\dot{\vec{u}}\|
\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{u} \times (\vec{u} \times \dot{\vec{u}})$ est donc un vecteur de même norme que $\dot{\vec{u}}$ mais de sens opposé ce qui signifie que

$$\vec{u} \times (\vec{u} \times \dot{\vec{u}}) = -\dot{\vec{u}}.$$

□

***Corrigé de l'exercice* 10**

L'accélération $\vec{a}$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps donc nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} && \text{(définition accélération)} \\
&= \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{u}) && \text{(définition } \vec{u}\text{)} \\
&= \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u} + v \cdot \dot{\vec{u}} && \text{(règle dérivation)}
\end{aligned}$$

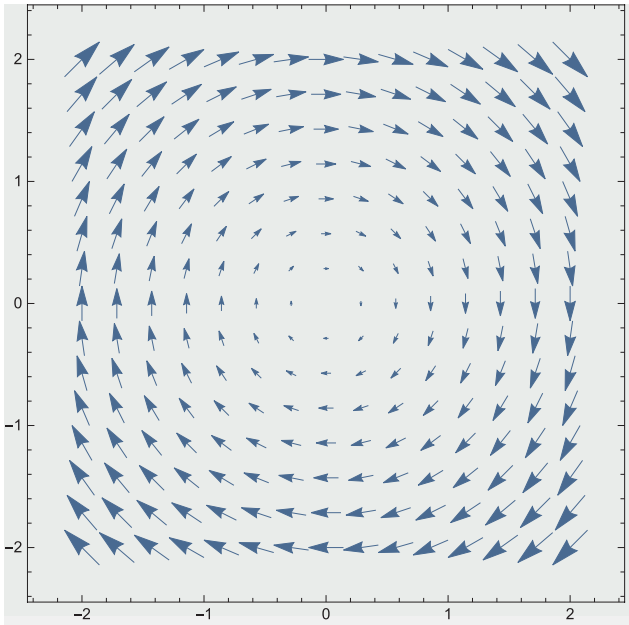
$\frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}$ est le vecteur *accélération tangentielle*. Il est colinéaire à la vitesse (car $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$) et sa norme vaut $\left|\frac{dv}{dt}\right|$ (car $\vec{u}$ est unitaire). Le vecteur accélération tangentielle est perpendiculaire au vecteur $v \cdot \dot{\vec{u}}$ (car $\vec{u}$ et $\dot{\vec{u}}$ sont orthogonaux, voir l'exercice 9(a)) qui est le vecteur *accélération normale*. Il est possible de montrer que sa norme vaut $\frac{v^2}{R}$, où R est le rayon de courbure de la trajectoire à un instant donnée.

***Corrigé de l'exercice* 11**

(a)

In[6]:=
```
Clear["Global`*"]
f[{x_, y_}] := 1/10 {y, -x}
VectorPlot[
  f[{x, y}], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  VectorScaling -> Automatic,
  VectorColorFunction -> None
]
```

Out[6]=



(b) (i) Le champ vectorielle est toujours colinéaire au vecteur vitesse et à la même sens que celui-ci donc la travail de $\vec{F}$ est strictement positif.

(ii) Le champ vectorielle fait toujours un angle obtus avec le vecteur vitesse donc le travail de $\vec{F}$ est négatif.

(iii) Le champ vectorielle fait toujours un angle droit avec le vecteur vitesse donc le travail de $\vec{F}$ est nul.

(c) (i) Comme nous imposons que le cercle soit parcouru en 2 secondes, la vitesse angulaire et $\frac{2\pi}{2} = \pi\,\mathrm{s}^{-1}$. Nous avons alors l'horaire suivant :

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(-\pi t) \\ \sin(-\pi t) \end{pmatrix}, \ t \in [0; 2].$$

Nous pouvons alors calculer le travail de $\vec{F}$ le long de $\vec{r}$:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^2 \vec{F}\big(\vec{r}_1(t)\big)\cdot \dot{\vec{r}}_1(t)dt \\
&= \int_0^2 \frac{1}{10}\begin{pmatrix}\sin(-\pi t)\\ -\cos(-\pi t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\pi\sin(-\pi t)\\ -\pi\cos(-\pi t)\end{pmatrix}dt \\
&= \int_0^2 \frac{1}{10}\big(\underbrace{\pi\sin^2(-\pi t)+\pi\cos^2(-\pi t)}_{=\pi}\big)dt \\
&= \frac{\pi}{10}\cdot t\Big|_0^2 \\
&= \frac{\pi}{5}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

(ii) Comme les point $(2;-2)$ et $(2;2)$ doivent être reliés en 10 secondes, la vitesse doit être de $\frac{4}{10}=0.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ et nous avons l'horaire suivant :

$$\vec{r}_2(t)=\begin{pmatrix}2\\ -2+0.4t\end{pmatrix},\ t\in[0;10].$$

Nous pouvons alors calculer le travail de $\vec{F}$ le long de $\vec{r}_2$ (nous notons C_2 la trajectoire) :

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{10} \vec{F}\big(\vec{r}_2(t)\big)\cdot \dot{\vec{r}}_2(t)dt \\
&= \int_0^2 \vec{F}\cdot \dot{\vec{r}}_2(t)dt \\
&= \int_0^2 \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2+0.4t\\ -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0.4\end{pmatrix}dt \\
&= \int_0^2 (0-0.8)dt \\
&= -0.08t\Big|_0^{10} \\
&= -0.8\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

(iii) Nous devons aller de $(0;0)$ à $(2;2)$ en 1 seconde donc nous avons l'horaire suivant

$$\vec{r}_3(t)=\begin{pmatrix}2t\\ 2t\end{pmatrix},\ t\in[0;1].$$

Nous pouvons alors calculer le travail de $\vec{F}$ le long de $\vec{r}_2$ (nous notons C_2 la

trajectoire) :

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}\big(\vec{r}_3(t)\big)\cdot \dot{\vec{r}}_3(t)dt \\
&= \int_0^2 \vec{F}\cdot \dot{\vec{r}}_3(t)dt \\
&= \int_0^2 \frac{1}{10}\begin{pmatrix}2t\\-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}dt \\
&= \int_0^2 \frac{1}{10}\underbrace{(4t-4t)}_{=0}dt \\
&= 0\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

(d)
```
In[7]:= r1[t_] := {Cos[-Pi t], Sin[-Pi t]}
t1=2;
r2[t_] := {2, -2 + 0.4 t}
t2=10;
r3[t_] := {2t, 2t}
t3=1;
Integrate[
  (f[r[t]].D[r[t], t]), {t, 0, tx}
] /. {{r -> r1, tx->t1}, {r -> r2, tx->t2}, {r -> r3
   , tx->t3}}
```

```
Out[7]= {Pi/5, -4/5, 0}
```

***Corrigé de l'exercice* 12**

(a) Il faut montrer que $\frac{d}{dt}v^2 = 2\vec{a}\cdot\vec{v}$. En écrivant v^2 comme un produit scalaire et en utilisant le règle de dérivation du produit scalaire, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}\big(\vec{v}\cdot\vec{v}\big) = \dot{\vec{v}}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = 2\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v} = 2\vec{a}\cdot\vec{v}.$$

(b) Par la deuxième loi de Newton, nous avons $\vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) = m\vec{a}(t)$ ce qui nous donne les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big)\cdot\dot{\vec{r}}(t)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} m\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)dt \\
&= \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2} 2\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)dt \\
&= \frac{1}{2}m\left(v^2(t)\Big|_{t_1}^{t_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}m\big(v^2(t_2)-v^2(t_1)\big) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}mv^2(t_2)}_{\text{énergie cin. en } t_2} - \underbrace{\frac{1}{2}mv^2(t_1)}_{\text{énergie cin. en } t_1}
\end{aligned}$$

***Corrigé de l'exercice* 13**

(a) **A montrer** Le moment cinétique $\vec{L}$ de m est constant.

Preuve Par le théorème 1.7, il suffit de montrer que $\dot{\vec{L}} = \overrightarrow{0}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) && \text{(déf. } \vec{L}\text{)} \\
&= \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} && \text{(règle dérivation)} \\
&= \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \left(-\frac{GMm}{r^2}\vec{u}\right) && \text{(déf. } \vec{p}\text{, 2}^{\text{e}} \text{ loi de Newton)} \\
&= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} && (\vec{v} \parallel m\vec{v},\ \vec{r} \parallel \vec{u}) \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

□

(b) **A montrer** La trajectoire de m se trouve dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}$ contenant M.

Preuve Le vecteur allant de M à m est le vecteur lieu $\vec{r}$. Il faut donc montrer que $\vec{r}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{L}$, c'est-à-dire que $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$:

$$\begin{aligned}
\vec{r} \cdot \vec{L} &= \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) && \text{(déf. } \vec{L}\text{)} \\
&= [\vec{r}; \vec{r}; \vec{p}] && \text{(déf. produit mixte)} \\
&= 0 && \text{(propr. produit mixte)}
\end{aligned}$$

□

***Corrigé de l'exercice* 14**

Posons $\alpha = GMm^2$. Nous avons alors les équations suivantes :

$$L^2 = \alpha\sqrt{x^2+y^2} + wx \qquad (1)$$

$$(L^2 - wx)^2 = \alpha^2 (x^2+y^2) \qquad (2)$$

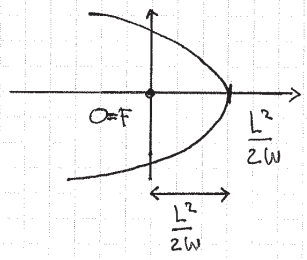
$$L^4 = (\alpha^2 - w^2)x^2 + 2L^2wx + \alpha^2 y^2 \qquad (3)$$

$\boxed{\underbrace{\alpha^2 - w^2}_{=:-k} = 0}$

$$L^4 = 2L^2wx + \underbrace{\alpha^2}_{=w^2 \text{ car } \alpha^2 = w^2} y^2$$

$$-2L^2w\left(x - \frac{L^4}{2L^2w}\right) = w^2 y^2$$

$$-\underbrace{\frac{2L^2w}{w^2}}_{=4\cdot\frac{L^2}{2w}}\left(x - \frac{L^2}{2w}\right) = y^2$$



<u>parabole dont l'origine est le foyer</u>

$\boxed{\alpha^2 - w^2 \neq 0}$ (3) est équivalente aux équations suivantes :

$$\underbrace{L^4 + \frac{L^4w^2}{\alpha^2-w^2}}_{=L^4\alpha^2/(\alpha^2-w^2)} = (\alpha^2 - w^2)\left(x + \frac{L^2w}{\alpha^2-w^2}\right)^2 + \alpha^2y^2$$

$$1 = \frac{\left(x + \frac{L^2w}{\alpha^2-w^2}\right)^2}{\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2-w^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{L^4}{\alpha^2-w^2}} \qquad (4)$$

$\boxed{\alpha^2 - w^2 > 0}$ $(K<0)$ Pour avoir un cercle il faut avoir

$$\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2-w^2)^2} = \frac{L^4}{\alpha^2-w^2}$$

$$\alpha^2 = \alpha^2 - w^2$$

$$w = 0$$

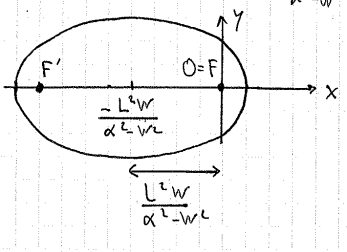
$\boxed{w=0}$ <u>cercle centré à l'origine</u>

$\boxed{w \neq 0}$ Déterminons la direction de l'axe focal :

$$\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2-\omega^2)^2} - \frac{L^4}{\alpha^2-\omega^2} = \frac{L^4\omega^2}{(\alpha^2-\omega^2)^2} > 0 \quad \text{car } \omega, L \neq 0$$

La trajectoire est donc une ellipse d'axe focal horizontale et la demi-distance focale vaut

$$c = \sqrt{\frac{L^4\omega^2}{(\alpha^2-\omega^2)^2}} \underset{\alpha^2-\omega^2>0}{=} \frac{L^2\omega}{\alpha^2-\omega^2}$$



ellipse dont l'origine est un foyer

$\boxed{\alpha^2-\omega^2<0}$ $(K>0)$

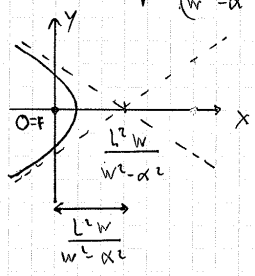
(4) peut être mise sous la forme suivante

$$\frac{\left(x-\frac{L^2\omega}{\omega^2-\alpha^2}\right)^2}{\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2-\omega^2)^2}} - \frac{y^2}{\underbrace{\frac{L^4}{\omega^2-\alpha^2}}_{>0}} = 1$$

Nous avons une hyperbole dont la demi-distance focale vaut

$$c = \sqrt{\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2-\omega^2)^2} + \frac{L^4}{\omega^2-\alpha^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{L^4\omega^2}{(\omega^2-\alpha^2)^2}} = \frac{L^2\cdot\omega}{\omega^2-\alpha^2}$$



hyperbole dont l'origine est un foyer

Remarque : L'équation (1) implique l'équation (2) mais ces équations ne sont pas équivalentes. Nous avons donc montré que si $P(x,y)$ satisfait l'équation donnée alors sa trajectoire est sur une conique.

***Corrigé de l'exercice* 15**

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique E_{cin} et de l'énergie potentielle E_{pot}. Nous commençons par calculer l'énergie cinétique :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}m^2v^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

Pour calculer l'énergie potentielle à une distance r de M, nous devons calculer le travail de la force de gravitation pour déplacer m jusqu'à une distance infinie de M. Pour cela, nous considérons le chemin rectiligne[4] $\vec{x}(t) = \left(\begin{smallmatrix} r+t \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $t \in [0; +\infty[$. A un instant t donné, la force de gravitation $\vec{F}$ sur ce chemin vaut

$$\vec{F}(\vec{x}(t)) = -\frac{mMG}{x^2(t)} \cdot \frac{\vec{x}(t)}{x} = -\frac{mMG}{x^3(t)} \cdot \vec{x}(t) = -\frac{mMG}{(r+t)^3} \cdot \begin{pmatrix} r+t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le vecteur vitesse vaut

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si nous notons C la trajectoire correspondant à $\vec{x}$, l'énergie potentielle vaut alors

$$\begin{aligned}
E_{\text{pot}} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} \\
&= \int_0^{+\infty} \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} -\frac{mMG}{(r+t)^3} \cdot \begin{pmatrix} r+t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{+\infty} -\frac{mMG}{(r+t)^3} \cdot (r+t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} -\frac{mMG}{(r+t)^2}dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^N -\frac{mMG}{(r+t)^2}dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \left.\frac{mMG}{r+t}\right|_0^N \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{mMG}{r+N} - \frac{mMG}{r} \\
&= -\frac{mMG}{r}.
\end{aligned}$$

4. Pour travailler avec un chemin général, il faut le paramétriser en coordonnées sphériques $(\rho, \varphi, \vartheta)$. Nous avons alors une paramétrisation de la forme

$$t \mapsto \rho(t) \begin{pmatrix} \sin\big(\theta(t)\big)\cos\big(\varphi(t)\big) \\ \sin\big(\theta(t)\big)\sin\big(\varphi(t)\big) \\ \cos\big(\theta(t)\big) \end{pmatrix}, t \in [0; +\infty[,$$

avec $\rho(0) = r$ et $\lim_{t\to+\infty} \rho(t) = +\infty$.

Il s'en suit que l'énergie mécanique vaut

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2m} - \frac{mMG}{r}.$$

***Corrigé de l'exercice* 16**

Une ellipse centrée à l'origine dont l'axe horizontal mesure $2a$ et l'axe vertical $2b$ a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(t) \\ y = b \cdot \sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi]$$

Afin de pouvoir faire un produit vectoriel nous ajoutons artificiellement une dimension et définissons le vecteur lieu

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'aire de l'ellipse vaut alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\| dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab\cos^2(t) + ab\sin^2(t) \end{pmatrix} \right\| dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab \underbrace{\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)}_{=1} dt \\
&= \frac{1}{2}abt\Big|_0^{2\pi} \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$