Algèbre linéaire appliquée

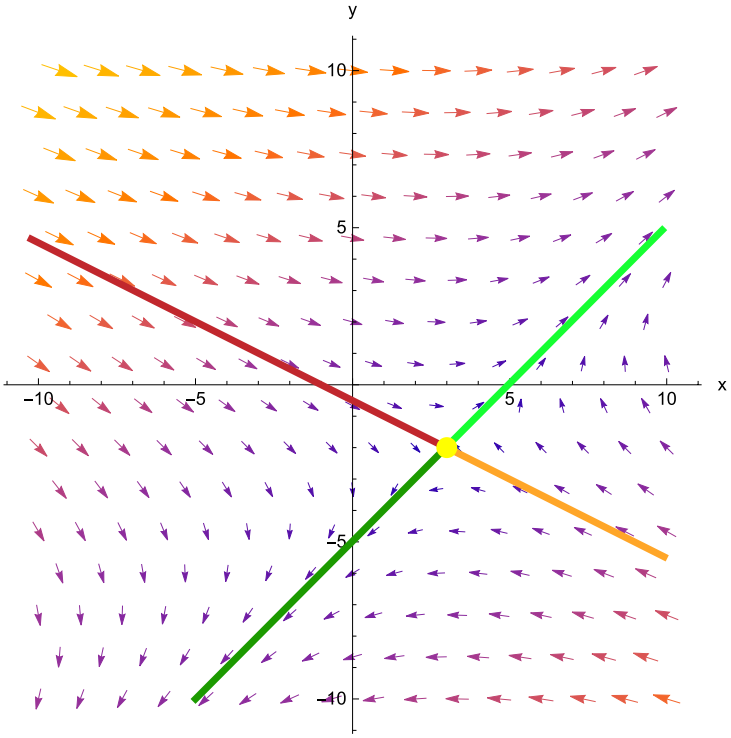


Table des matières

Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter des applications de l'algèbre linéaire autres que le travail avec les transformations géométriques du plan ou de l'espace. Nous commencerons par discuter du chiffre de Hill qui est une application de la multiplication matricielle. Nous justifierons ensuite le critère vu en début d'année scolaire et permettant de déterminer la nature d'un point critique d'une fonction réelle de deux variables et nous l'étendrons à des fonctions de n variables. Pour ceci, nous aurons besoin de la notion de valeur propre. Finalement, nous terminerons en traitant les systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. Ces différentes parties théorique sont complétées par des exercices qui ont, pour la majorité, un corrigé disponible en fin de script.

1 Chiffre de Hill

En 1929, le mathématicien américain Lester Hill (1891-1961) a mis en place une méthode de cryptographie utilisant une substitution polygrammique. Cela signifie que, contrairement à des chiffres tels celui de César, les lettres ne sont par remplacées une à une mais par paquets.

Nous commençons par expliquer grossièrement comment fonctionne le chiffre de Hill. A chaque caractère du texte clair est associé un code (par exemple son code ASCII) et la clé de chiffrement est un nombre entier n supérieur au plus grand code ainsi qu'une matrice carrée M d'ordre k convenablement choisie, k correspondant au nombre de code contenu dans un paquet. Cette matrice s'appelle la **matrice de chiffrement**. La suite de caractères codés est alors introduite dans une matrice P (pour « plaintext », texte clair en anglais) à k lignes, les colonnes correspondant aux paquets de k caractères codés (les manques dans la matrice étant comblés, par exemple, par des 0). Le texte chiffré C (pour « ciphertext », texte chiffré en anglais)) s'obtient alors par multiplication modulo n de la matrice de chiffrage M avec la matrice P du texte clair codé :

$$C \equiv M \cdot P \pmod{n}.$$

Afin de clarifier cet algorithme, nous allons dans les deux prochaine sections expliquer le fonctionnement du chiffre de Hill (chiffrement et déchiffrement) lorsque les paquets sont constitué de deux lettres (appelés bigrammes, on parle alors de chiffre bigraphique) codées à l'aide de leur position dans l'alphabet. Nous traiterons ensuite le cas général et, finalement, nous terminerons par la cryptanalyse du chiffre de Hill.

Chiffrement bigraphique

Nous voulons chiffrer un texte sans espace entièrement écrit en minuscule avec les 26 lettres de l'alphabet (nous considérons que le nombre de lettres tu texte est pair et si tel n'est pas la cas nous ajoutons un `z` en dernière position). Pour cela, nous commençons par coder les lettres par leur position dans l'alphabet :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le texte clair est alors codé sous la forme d'une suite finie $(P_j)_{j\in J},\ J = \{1; 2; 3; \ldots; N\}$ de nombres entiers compris entre 0 et 25. Ces nombres sont alors groupés en bigrammes P_j, P_{j+1} qui sont chiffrées C_j, C_{j+1} avec la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} C_j \\ C_{j+1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_j \\ P_{j+1} \end{pmatrix} \pmod{26},$$

où $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ une matrice est à coefficients entiers et de déterminant relativement premier[1] avec 26 (cette dernière condition sera expliquée dans la section suivante). Cette matrice est appelée **matrice de chiffrement** et constitue avec 26 la clé du chiffre.

Illustrons ce fonctionnement à l'aide d'un exemple :

1. Deux nombres entiers sont relativement premier si leur plus grand diviseur commun vaut 1.

1.1 Exemple
Nous voulons chiffrer `collegedusud`. Le codage de ce texte donne

$$P = (2; 14; 11; 11; 4; 6; 4; 3; 20; 18; 20; 3).$$

Nous choisissons

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

comme matrice de chiffrement. Celle-ci est convenable car $\mathrm{Det}(M) = 7$ et 7 est relativement premier avec 26. Nous chiffrons maintenant P :

(1) $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 72 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \pmod{26}$
Les premières lettres du texte chiffré sont `UU`.

(2) $\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 66 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} \pmod{26}$
La suite du texte chiffré est `DO`.

(3) ...

Remarquons que plutôt que de multiplier un à un les vecteurs correspondant aux bigrammes nous pouvons les grouper dans une matrice dont ils constituent les colonnes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 4 & 20 & 20 \\ 14 & 11 & 6 & 3 & 18 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 20 & 3 & 0 & 17 & 16 & 23 \\ 20 & 14 & 8 & 19 & 6 & 9 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

Cette écriture sera très utile lors de l'implémentation de l'algorithme avec Mathematica.
Le texte chiffré codé est donc

$$C = (20; 20; 3; 14; 0; 8; 17; 19; 16; 6; 23; 9)$$

et finalement nous obtenons le texte chiffré :

`UUDOAIRTQGXJ`

☺

Déchiffrement bigraphique

Pour déchiffre le cryptogramme, il faut calculer l'inverse de la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Traditionnellement, nous avons

$$M^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Comme nous travaillons modulo 26, la multiplication par $\frac{1}{\mathrm{Det}(M)}$ n'est pas possible. Cependant, de façon générale, la division par un nombre x est définie par la multiplication par son inverse x^{-1}. Le choix de la matrice de chiffrement M est donc limité par l'existence de l'inverse de $\mathrm{Det}(M)$ modulo 26 :

1.2 Théorème
Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ *une matrice à coefficients entiers. Si* $\mathrm{Det}(M)$ *et 26 sont relativement premiers alors l'inverse de* $\mathrm{Det}(M)$ *modulo 26 existe et la matrice inverse modulo 26 de* M *vaut*

$$M^{-1} \equiv \big(\mathrm{Det}(M)\big)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

Démonstration
Si $\mathrm{Det}(M)$ et 26 sont relativement premiers, par le théorème de Bachet-Bézout [2], il existe des nombres $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x \cdot \mathrm{Det}(M) + y \cdot 26 = 1.$$

Nous avons alors $x \cdot \mathrm{Det}(M) = 1 - 26y$, c'est-à-dire

$$x \cdot \mathrm{Det}(M) \equiv 1 \pmod{26}$$

et x est l'inverse de $\mathrm{Det}(M)$ modulo 26 ce qui démontre la première partie de l'affirmation. Nous avons alors les congruences suivantes :

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{Det}(M)\big)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\equiv \big(\mathrm{Det}(M)\big)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \big(\mathrm{Det}(M)\big)^{-1} \cdot (ad-bc) & \big(\mathrm{Det}(M)\big)^{-1} \cdot 0 \\ \big(\mathrm{Det}(M)\big)^{-1} \cdot 0 & \big(\mathrm{Det}(M)\big)^{-1} \cdot (ad-bc) \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{26}. \end{aligned}$$

De façon analogue, on montre que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \big(\mathrm{Det}(M)\big)^{-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$.

□

Illustrons le déchiffrement d'un cryptogramme construit avec l'algorithme de Hill en reprenant l'exemple 1.1 :

1.3 Exemple
Nous voulons déchiffrer le cryptogramme `UUDOAIRTQGXJ` sachant qu'il a été construit modulo 26 avec la matrice de chiffrement $M = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Le codage du cryptogramme nous donne

$$C = (20; 20; 3; 14; 0; 8; 17; 19; 16; 6; 23; 9).$$

Il nous faut maintenant calculer l'inverse modulo 26 de M Nous avons

$$\mathrm{Det}(M) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7.$$

2. Le théorème de Bachet-Bézout stipule que pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = \mathrm{pgdc}(a, b)$, le calcul des nombres x, y se faisant par l'algorithme de Euclide étendu.

Comme 7 et 26 sont relativement premiers, M a été convenablement choisi et est inversible modulo 26. Pour calculer M^{-1}, il faut calculer l'inverse de 7 modulo 26. Nous le faisons à l'aide de l'algorithme de Euclide étendu :

	$\cdot 26$	$\cdot 7$	calculs pour la ligne suivante
26	1	0	
7	0	1	$26 \bmod 7 = 5 = 26 - 3 \cdot 7$
$26 \bmod 7 = 5$	1	-3	$7 \bmod 5 = 2 = 7 - 5$
$7 \bmod 5 = 2$	-1	4	$5 \bmod 2 = 1 = 5 - 2 \cdot 2$
$5 \bmod 2 = 1$	3	-11	

Nous avons donc

$$3 \cdot 26 + (-11) \cdot 7 = 1 \text{ donc } -11 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{26}.$$

Cela signifie que -11 est l'inverse modulo 26 de 7 :

$$7^{-1} \equiv -11 \pmod{26}.$$

L'inverse de M modulo 26 est donc

$$M^{-1} \equiv 7^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \equiv -11 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -55 & 33 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

Nous déchiffrons maintenant C :

(1) $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ -220 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} \pmod{26}$
Les premières lettres du texte clair sont `co`.

(2) $\begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 \\ -75 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} \pmod{26}$
La suite du texte clair est `ll`.

(3) ...

Remarquons que plutôt que de multiplier un à un les vecteurs correspondant aux bigrammes nous pouvons les grouper dans une matrice dont ils constituent les colonnes :

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 3 & 0 & 17 & 16 & 23 \\ 20 & 14 & 8 & 19 & 6 & 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 4 & 20 & 20 \\ 14 & 11 & 6 & 3 & 18 & 3 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

Cette écriture sera très utile lors de l'implémentation de l'algorithme avec Mathematica.
Le cryptogramme déchiffré codé est donc

$$P = (2; 14; 11; 11; 4; 6; 4; 3; 20; 18; 20; 3).$$

et finalement nous obtenons le texte clair :

`collegedusud`

☺

Cas général

L'algorithme de Hill peut être utilisé en codant plus subtilement le texte. Une possibilité est d'utiliser le code ASCII. Comme celui-ci contient 256 codes allant de 0 à 255, il faudra travailler modulo 256 au minimum. Il est aussi possible d'augmenter la taille des groupes de caractères. Si les groupe ont une longueur k, la matrice de chiffrement sera alors une matrice carrée d'ordre k. Le critère d'inversibilité de cette matrice est alors analogue au cas $k = 2$:

1.4 Théorème
Soit $n \in \mathbb{N}, n > 1$ et M une matrice carrée d'ordre k. La matrice M est inversible modulo n si et seulement si $\mathrm{Det}(M)$ *et n sont relativement premiers.*

Démonstration
Dans $\mathbb{R}$, le calcul des vecteurs colonnes $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ de la matrice inverse de M peut se faire en résolvant les systèmes d'équations

$$M \cdot X^{(j)} = I_k^{(j)},\ j = 1, 2, \ldots k$$

où $I_k^{(j)}$ est le j-ème vecteur colonne de I_k, la matrice identité d'ordre k. La méthode de Cramer donne alors explicitement les solutions de chacun de ces systèmes sous la forme de déterminants divisés par le déterminant de M. Si nous travaillons modulo n, ces solutions existent donc si et seulement si l'inverse modulo n de $\mathrm{Det}(M)$ existe et, par le théorème de Bézout [3], l'inverse modulo n de $\mathrm{Det}(M)$ existe si et seulement si n et $\mathrm{Det}(M)$ sont relativement premiers. □

Cryptanalyse

Une faiblesse du chiffre de Hill réside dans sa régularité. En effet si la longueur des paquets de caractères est connue (ce qui est possible grâce à la méthode de Kasiski), il peut être cassé par une analyse des fréquences de ces paquets. Pour contre, plus la taille des paquets est grande, plus il est difficile de faire ressortir des résultats pertinents de l'analyse.

Il se peut que nous ayons à disposition à la fois un message chiffré et sa traduction en clair ou du moins une partie (c'était le cas des cryptogrammes allemands envoyés durant la Seconde Guerre Mondiale qui se terminaient par « Heil Hitler »). Le théorème suivant donne une méthode permettant de trouver la matrice de déchiffrement dans le cas où le message clair et le message chiffrés sont donnés sous forme d'un code numérique c'est-à-dire d'une liste de nombres :

3. Le théorème de Bézout stipule que deux nombres $a, b \in \mathbb{Z}$ sont relativement premiers si et seulement si l'équation $ax+by = 1$ possède une solution $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, ce qui, dans le cas où b est strictement supérieur à 1, est équivalent à dire que qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax \equiv 1 \pmod{b}$ ou encore que a possède un inverse modulo b.

1.5 Théorème
Soit M une matrice de chiffrement d'ordre k inversible modulo n, $P = (p_1; p_2; \ldots; p_{k^2})$ une liste de k^2 entiers et $C = (c_1; c_2; \ldots; c_{k^2})$ la liste des k^2 entiers obtenus par chiffrement de Hill modulo n à l'aide de la matrice M. Si la matrice $\hat{C}$ dont les colonnes sont $c_{mk+1}, c_{mk+2}, \ldots, c_{mk+k}$ (pour $m = 0, 1, \ldots, k-1$) est inversible modulo n alors

$$M^{-1} \equiv \hat{P} \cdot \hat{C}^{-1} \pmod{n},$$

où $\hat{P}$ est la matrice dont les colonnes sont $p_{mk+1}, p_{mk+2}, \ldots, p_{mk+k}$ (pour $m = 0, 1, \ldots, k-1$).

Démonstration
Notons I_k la matrice identité d'ordre k. Nous avons les congruences suivantes :

$$I_k \equiv \hat{C} \cdot \hat{C}^{-1} \equiv M \cdot \hat{P} \cdot \hat{C}^{-1} \pmod{n}.$$

Il s'en suit que

$$M^{-1} \equiv \hat{P} \cdot \hat{C}^{-1} \pmod{n}.$$

□

1.6 Exemple
Alice envoie à Bob des messages cryptés. Eve arrive à intercepter ces messages et elle sait que ceux-ci sont codés par rapport à la position des lettres dans l'alphabet (0 pour `a`,...) puis chiffrés modulo 26 par digrammes à l'aide du chiffre de Hill. Afin de calculer la matrice de déchiffrement, Eve a réussi à obtenir un texte clair et sa version chiffrée :

`rdvtroishgaretpf  AHABHKKWZQZHJJEV`

Eve commence alors par déterminer le code du texte clair et celui du cryptogramme :

$$P = (17; 3; 21; 19; 17; 14; 8; 18; 7; 6; 0; 17; 4; 19; 15; 5),$$
$$C = (0; 7; 0; 1; 7; 10; 10; 22; 25; 16; 25; 7; 9; 9; 4; 21).$$

Elle construit ensuite la matrice dont les colonnes sont les digrammes de C :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 10 & 25 & 25 & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 10 & 22 & 16 & 7 & 9 & 21 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice formée par les deux premières colonnes vaut 0 donc celle-ci n'est pas inversible par contre celui de la matrice formée par les deuxième et troisième colonnes vaut -7 donc celle-ci est inversible modulo 26. Eve pose alors

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}, \ \hat{P} = \begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 19 & 14 \end{pmatrix}.$$

et, par le théorème précédent en sachant que $(-7)^{-1} \equiv 11 \pmod{26}$, la matrice de déchiffrement est alors

$$\begin{aligned} M^{-1} \equiv \hat{P} \cdot \hat{C}^{-1} &\equiv \begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 19 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 19 & 14 \end{pmatrix} \cdot 11 \cdot \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 2123 & -1617 \\ 1936 & -1463 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 17 & 21 \\ 12 & 19 \end{pmatrix} \pmod{26}. \end{aligned}$$

Pour vérifier que la matrice trouvée est correcte, il suffit alors de la multiplier avec la matrice dont les colonnes sont tous les digrammes chiffrés et codés :

$$\begin{pmatrix} 17 & 21 \\ 12 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 10 & 25 & 25 & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 10 & 22 & 16 & 7 & 9 & 21 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 17 & 21 & 17 & 8 & 7 & 0 & 4 & 15 \\ 3 & 19 & 14 & 18 & 6 & 17 & 19 & 5 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

Nous obtenons la matrice dont les colonnes sont les digrammes clairs codés : la matrice trouvée est effectivement la bonne !

☺

2 Optimisation à plusieurs variables

Le but de cette section est de démontrer à l'aide de l'algèbre linéaire un critère permettant de garantir qu'une fonction de plusieurs variables possède un extremum local. Pour cela, nous allons voir que le développement de Taylor d'une fonction de plusieurs variables peut s'écrire à l'aide d'un endomorphisme symétrique et du produit scalaire.

Dans la première section de ce document, nous étudierons les propriétés des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^2$. Ceci fait nous pourrons démontrer en seconde section le critère garantissant qu'une fonction de deux variables possède un extremum local (il s'agit du critère qui a été vu dans le cadre de l'étude des fonctions des deux variables). Finalement, nous généraliserons ce critère aux fonctions ayant un nombre quelconque de variables.

Endomorphismes symétriques

Dans toute cette section, nous allons travailler dans une espace vectoriel réel E de dimension 2 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1; e_2)$ et du produit scalaire dans cette base. Sauf mention contraire, tous les vecteurs seront exprimés dans cette base.

Afin d'éviter toute confusion entre produit matriciel et produit scalaire, nous allons introduire une nouvelle notation pour celui-ci :

2.1 Notation
Soit $v, w \in E$ des vecteurs de composantes $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right)$. Le **produit scalaire** de v et w est noté $\langle v, w \rangle$ et vaut $v_1 w_1 + v_2 w_2$.

2.2 Remarques

(a) Le produit scalaire peut être vu comme un multiplication matricielle. Pour des vecteur $v, w \in E$ de matrice colonne V, W, nous avons

$$\langle v, w \rangle = {}^tV \cdot W,$$

où ${}^tV$ est la transposée de V, donc une matrice ligne. Par exemple,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$$

(b) Nous travaillons ici avec le produit scalaire standard, mais il est possible de faire une théorie générale sur les espaces vectoriels muni d'un produit scalaire (c'est-à-dire une forme bilinéaire, symétrique et définie positive) : ces espaces vectoriels sont dits préhilbertiens.

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un endomorphisme symétrique :

2.3 Définition
Un endomorphisme[4] *m de E est un* ***endomorphisme symétrique*** *si pour tout $v, w \in E$*

$$\langle m(v), w \rangle = \langle v, m(w) \rangle.$$

2.4 Propriété
Soit m un endomorphisme de E. L'endomorphisme m est symétrique si est seulement si sa matrice M est symétrique par rapport à sa diagonale descendante, c'est-à-dire ${}^tM = M$.

Démonstration
Voir l'exercice 12. □

Certains endomorphisme, par exemple l'endomorphisme de matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, ne possède pas de valeur propre mais une telle situation ne peut se présenter pour un endomorphisme symétrique :

2.5 Lemme
L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme symétrique de E est non vide.

Démonstration
Voir l'exercice 13. □

2.6 Lemme
Soit m un endomorphisme symétrique de E et soit $v, w \in E$ avec $v \neq 0$ un vecteur propre de m . Si $\langle v, w\rangle = 0$ alors w est aussi un vecteur propre de m.

Démonstration
Soit λ la valeur propre associée au vecteur v.

(a) Si $m(w) = 0$, nous sommes dans une des situations suivantes :
- Soit $w = 0$ et nous avons $m(w) = m(0) = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda w$. Le vecteur w est un vecteur propre de m associé à la valeur propre λ.
- Soit $w \neq 0$ et nous avons $m(w) = 0 = 0 \cdot w$ ce qui signifie 0 est une valeur propre de m. Le vecteur w est donc un vecteur propre de m associé à la valeur propre 0.

(b) Si $m(w) \neq 0$, nous considérons les égalités suivantes :

$$\langle v, m(w)\rangle = \langle m(v), w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = \lambda \cdot 0 = 0.$$

$m(w)$ est donc un vecteur non-nul orthogonal à v. Comme nous sommes dans un espace vectoriel de dimension 2, tous les vecteurs orthogonaux à v sont colinéaires. Les vecteurs w et $m(w)$ sont donc colinéaires et il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $m(w) = \mu w$ ce qui signifie que μ est une valeur propre de m et que w est un vecteur propre qui lui est associé.

□

2.7 Théorème (spectral [5])
Si m est un endomorphisme symétrique de E alors il existe une base orthonormée de E constituée uniquement de vecteurs propres de m.

4. Un endomorphisme de E est une application linéaire de E vers E.
5. Le spectre d'une application linéaire est l'ensemble de ses valeurs propres.

Démonstration
Par le lemme 2.5, M possède au moins un vecteur propre e_1' et nous pouvons choisir e_1' unitaire. Par le lemme 2.6 tout vecteur e_2' orthogonal à e_1' est aussi un vecteur propre. Nous choisissons alors e_2' unitaire et (e_1', e_2') est la base orthonormée recherchée. □

2.8 Remarque
Nous avons démontré ici un cas particulier du théorème spectral qui en fait est valable pour n'importe quel endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel préhilbertien ($\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel est préhilbertien).

2.9 Corollaire
Soit m est un endomorphisme symétrique de E, (e_1', e_2') une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de m et soit λ_i, la valeur propre associée au vecteur e_i', $i = 1, 2$. Nous avons les propriétés suivantes :

(a) $\operatorname{Det}(M) = \lambda_1\lambda_2$, *où M est la matrice de m dans $\mathcal{B}$.*

(b) *Pour tout vecteur $v \in E$ avec $v = \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2'$ nous avons*

$$\langle v, m(v)\rangle = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2.$$

Démonstration
Voir les exercices 15 et 16. □

2.10 Remarque
L'existence d'une base orthonormée constituée de vecteurs propres (et par conséquent l'existence de deux espaces propres) formulé en hypothèses du corollaire 2.9,est garantie par le théorème spectral.

2.11 Théorème
Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ la matrice d'un endomorphisme symétrique m de E.

(a) *Si* $\operatorname{Det}(M) > 0$ *alors*

$$\operatorname{sgn}\langle v, m(v)\rangle = \operatorname{sgn} a$$

pour tout vecteur $v \in E \setminus \{0\}$.

(b) *Si* $\operatorname{Det}(M) < 0$ *alors il existe des vecteurs $v_1, v_2 \in E$ de norme arbitrairement petites tels que*

$$\operatorname{sgn}\langle v_i, m(v_i)\rangle, \ i = 1, 2,$$

soient des signes différents.

Démonstration
Soit $\mathcal{B}' = (e_1'; e_2')$ une base orthonormée constituée de vecteurs propres de M (l'existence d'une telle base est garantie par le théorème spectral) et soit λ_1, λ_2 les valeurs propres associées à chacun de ses vecteurs.

(a) Soit $v \in V \setminus \{0\}$ un vecteur de composantes α_1, α_2 dans $\mathcal{B}'$. Par le corollaire 2.9(b), nous avons

$$\langle v, m(v)\rangle = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2. \tag{1}$$

Si $\mathrm{Det}(M) > 0$, par le corollaire 2.9(a), les valeurs propres λ_1 et λ_2 de M sont de même signe. Comme v est non-nul, ses composantes α_1 et α_2 dans $\mathcal{B}'$ sont non simultanément nulles. Les deux termes de l'équation précédente le sont aussi et ils ont chacun le même signe que les valeurs propres de M. Par conséquent, nous avons

$$\operatorname{sgn}\langle v, m(v)\rangle = \operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2.$$

Pour terminer notre démonstration, il nous reste à montrer que le signe des valeurs propres de M est le même que le signe de a. Celles-ci ont été calculées dans l'exercice 13 et valent

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + c \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

avec $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$. Comme $0 < \mathrm{Det}(M) = ac - b^2$, nous avons $0 < b^2 < ac$ et donc $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} c \neq 0$. Nous avons alors un des deux cas suivants :

- Si $a > 0$ alors $c > 0$ et $\frac{a+c+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$.
- Si $a < 0$ alors $c < 0$ et $\frac{a+c-\sqrt{\Delta}}{2} < 0$.

Comme les deux valeurs propres ont le même signe, le résultat est démontré.

(b) Si $\mathrm{Det}(M) < 0$, par le corollaire 2.9(a), les valeurs propres M sont de signes différents. Il suit du corollaire 2.9(b) que pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\langle \alpha_i e_i', m(\alpha_i e_i')\rangle = \lambda_i \alpha_i^2, \ i = 1, 2$$

et $\alpha_1 e_1', \alpha_2 e_2'$ sont donc des vecteurs avec la propriété recherchée.

□

Critère pour une fonction de deux variables

Soit $a \in \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage de a et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues en a et soit $\varepsilon > 0$ tel que le disque $D_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < \varepsilon\}$ de rayon ε centré en a est inclus dans U (par définition d'un voisinage un tel ε existe toujours).

2.12 Théorème
Le développement de Taylor d'ordre 2 de f en a peut s'écrire de la façon suivante :

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + \tfrac{1}{2}\langle \nabla f(a), x - a\rangle + \tfrac{1}{2}\langle x - a, h_{f,a}(x - a)\rangle}$$

avec $x \in U$, $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$ et $h_{f,a}$ l'endomorphisme symétrique de matrice

$$H_{f,a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\nabla f(a)$ est appelé ***gradient*** *de f en a et la matrice $H_{f,a}$* ***hessienne*** *de f en a. De plus, il existe $\varepsilon > 0$ avec $D_\varepsilon(a) \subset U$ et tel que pour tout $x \in D_\varepsilon(a)$, il existe $\hat{a}$ sur le segment reliant x et a tel que l'approximation précédente soit une égalité en évaluant la hessienne en $\hat{a}$ au lieu de a.*

Démonstration
Pour la première partie de l'énoncé voir l'exercice 17, deuxième partie sans preuve. □

2.13 Remarque
Le gradient d'une fonction f possède aussi les notations suivantes : $\operatorname{grad} f$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ ou $\vec{\nabla} f$.

2.14 Théorème
Soit a un point critique de f.

(a) *Si $\operatorname{Det}(H_{f,a}) > 0$ alors f possède un extremum en a. De plus, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ alors il s'agit d'un minimum local et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ alors il s'agit d'un maximum local.*

(b) *Si $\operatorname{Det}(H_{f,a}) < 0$ alors f possède un point de selle en a.*

2.15 Remarque
Dans le cas où le déterminant de la hessienne est strictement positif, comme celui vaut $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right)^2$, la dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$ ne peut être nulle.

Démonstration

(a) Soit $\varepsilon > 0$ tel que D_ε satisfasse la seconde partie du théorème 2.12 et soit $x \in D_\varepsilon(a)$. Il existe $\hat{a} \in D_\varepsilon(a)$ tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}\left\langle x - a, h_{f,\hat{a}}(x-a)\right\rangle.$$

Comme les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont continues, la fonction

$$b \in D_\varepsilon(a) \mapsto \operatorname{Det}\left(H_{f,b}\right)$$

est une fonction continue. Nous pouvons donc supposer que ε est suffisamment petit pour que $\operatorname{Det}\left(H_{f,b}\right) > 0$ pour tout $b \in D_\varepsilon(a)$, en particulier $\operatorname{Det}\left(H_{f,\hat{a}}\right) > 0$. La fonction $h_{f,\hat{a}}$ étant un endomorphisme symétrique dont la matrice a un déterminant positif, par le théorème 2.11(a),

$$\operatorname{sgn}\left\langle (x-a), h_{f,\hat{a}}(x-a)\right\rangle = \operatorname{sgn}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{a})$$

Comme les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont continues, nous pouvons supposer que ε est suffisamment petit pour que la fonction $b \in D_\varepsilon(a) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(b)$ soit de signe constant (par la remarque 2.15 cette dérivée partielle ne peut être nulle en a) et donc que $\operatorname{sgn}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{a}) = \operatorname{sgn}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$. Nous avons donc

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}\left\langle x - a, h_{f,\hat{a}}(x-a)\right\rangle \begin{cases} < f(a) & \text{si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0 \\ > f(a) & \text{si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0 \end{cases}$$

La fonction f possède donc un maximum local en a si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ et un minimum local si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$.

(b) Nous n'allons pas démontrer rigoureusement cet énoncé mais nous nous contenterons de faire ressentir l'essence de la preuve.

Par le théorème 2.11(b), il existe des vecteurs v_1, v_2 de normes arbitrairement petites tels que

$$\operatorname{sgn} \langle v_i, h_{f,a}(v_i) \rangle \,, \;\; i = 1, 2$$

soient de signes différents. Par le théorème 2.12, nous avons

$$f(a + v_i) - f(a) \approx \frac{1}{2} \langle v_i, h_{f,a}(v_i) \rangle \,, \;\; i = 1, 2.$$

Pour $i = 1, 2$, ces approximations sont de signes différents et, par la continuité des dérivées partielles d'ordre 2, il est possible de montrer qu'il existe donc des points arbitrairement proches de a dont les images par f sont inférieures ainsi que des points arbitrairement proches de a dont les images par f sont supérieures à $f(a)$. Ceci signifie que f possède un point de selle en a.

□

Critère pour une fonction de n variables

Nous allons ici généraliser les résultats des deux précédentes section. Nous commençons par le théorème 2.12 :

2.16 Théorème
Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de a et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues en a Si a est une point critique de f alors le développement de Taylor d'ordre 2 de f en a peut s'écrire de la façon suivante :

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + \tfrac{1}{2} \langle \nabla f(a), x - a \rangle + \tfrac{1}{2} \langle x - a, h_{f,a}(x - a) \rangle}$$

avec $x \in U$, $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)$ et $h_{f,a}$ l'endomorphisme de matrice

$$H_{f,a} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right),$$

*où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les n variables dont dépend la fonction f. Le vecteur $\vec{\nabla} f(a)$ est appelé **gradient** de f en a et la matrice $H_{f,a}$ **hessienne** de f en a.*

De plus, si x est suffisamment proche de a, il existe $\hat{a} \in U$ sur le segment reliant x et a tel que l'approximation précédente soit une égalité en évaluant la hessienne en $\hat{a}$ au lieu de a.

Sans preuve.

Il nous faut donc étudier la propriété de la hessienne qui est un cas particulier de matrice d'endomorphisme symétrique (le théorème de Schwarz garantit que l'ordre des dérivées peut être changé donc que la hessienne est symétrique). Mis à part le le théorème 2.11, l'ensemble du développement fait dans la section sur les endomorphismes symétriques est généralisable à un espace vectoriel réel E de dimension n muni du produit scalaire standard. Le résultat central devient alors la généralisation du corollaire 2.9 :

2.17 Théorème
Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni du produit scalaire standard et m un endomorphisme de E. Si m est symétrique, il existe alors une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E formée uniquement de vecteurs propres de m et nous avons les propriétés suivantes :

(a) $\mathrm{Det}(M) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$,

(b) $\langle v, m(v)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$ *pour tout vecteur* $v \in E$,

où M est la matrice de m dans une base quelconque, où λ_i, $i = 1, \ldots, n$, sont les n valeurs propres associées aux vecteurs de $\mathcal{B}'$ et où α_i, $i = 1, \ldots, n$, sont les composantes de v dans $\mathcal{B}'$.

Sans preuve.

Nous pouvons maintenant formuler notre critère :

2.18 Théorème
Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de a et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues en a Si a est une point critique de f et si la hessienne de f en a possède des valeurs propres...

- *...toutes strictement positives alors f a un minimum local en a.*
- *...toutes strictement négatives alors f a un maximum local en a.*
- *...strictement positives et strictement négatives alors f a un point de selle en a.*

Démonstration

Pour x suffisamment proche de a, par le théorème 2.16, il existe un nombre $\hat{a}$ telle que

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}\langle x - a, h_{f,\hat{a}}(x - a)\rangle$$

Il suit alors du théorème 2.17 que

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les composantes de $x - a$ dans une base orthonormée formée uniquement de vecteur propre de $h_{f,\hat{a}}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les différentes valeurs propres correspondantes. Comme toutes les fonctions intervenant dans le calcul des valeurs propres sont

continues, si toutes les valeurs propres de $h_{f,a}$ sont non-nulles alors il en est de de même pour celle de $h_{f,\hat{a}}$ et elles gardent le même signe. Il s'en suit que le signe de $f(x) - f(a)$ dépend uniquement du signe des valeurs propres de $h_{f,a}$, en particulier, $f(x) - f(a)$ est...

- ...positif si toutes les valeurs propres sont strictement positives et a est donc un minimum local.
- ...négatif si toutes les valeurs propres sont strictement négatives et a est donc un maximum local.
- ...de signe variable s'il existe des valeurs propres positives et négatives et a est donc un point de selle.

□

2.19 Exemples

(a) Nous voulons déterminer à la main les extrema locaux de la fonction

$$f(x, y, z) = f(x; y; z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 8z, \ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3,$$

ainsi que leur nature. Nous commençons par chercher les points critiques de f. Pour cela nous devons résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 8 \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

Nous avons deux points critiques :

$$P_1(-2; 0; -4) \quad \text{et} \quad P_2(0; 0; -4).$$

Afin de déterminer la nature de ces points critiques, nous calculons la hessienne de f :

$$H_{f,(x;y;z)} = \begin{pmatrix} 6+6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il faut ensuite évaluer la hessienne à chaque point critique est déterminer ses valeurs propres :

$$H_{f,(-2;0;-4)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_{f,(0;0;-4)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la hessienne en $(-2; 0; 4)$ sont $-6,\ 2$ et 2 donc il s'agit d'un point de selle. Les valeurs propres de la hessienne en $(0; 0; 4)$ sont $6,\ 2$ et 2 donc il s'agit d'un minimum local et ce minimum n'est pas global car

$$\lim_{x \to -\infty} f(x; 0; 0) = \lim_{x \to -\infty} x^3 + 3x^2 = -\infty.$$

(b) Nous voulons déterminer avec l'aide de Mathematica les extrema locaux de la fonction

$$f(x,y,z) = 8x^3 + y^3 - 12xyz + 10z^3 - 6z,\ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3,$$

ainsi que leur nature. Nous commençons par définir la fonction f ainsi que liste `var` contenant la liste des variables par rapport auxquelles il va falloir dériver, ceci dans le but d'automatiser au maximum ces calculs.

In[1]:=
```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_, z_] := 8 x^3 + y^3 - 12 x y z + 10 z^3 - 6
    z
var = {x, y, z};
```

Nous générons maintenant les équations à résoudre afin de calculer les points critiques :

In[2]:=
```
eqns = D[f[x, y, z], {{x, y, z}, 1}] == {0, 0, 0}
```

Out[2]= $\{24x^2 - 12yz, 3y^2 - 12xz, -12xy + 30z^2 - 6\} = \{0,0,0\}$

Résolvons ces équations :

In[3]:=
```
ptsCrit = Solve[eqns, {x, y, z}, Reals]
```

Out[3]= $\{\{x \to -1, y \to -2, z \to -1\}, \left\{x \to 0, y \to 0, z \to -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}, \left\{x \to 0, y \to 0, z \to \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}, \{x \to 1, y \to 2, z \to 1\}\}$

Afin de déterminer la nature de chacun de ces quatre points critiques, nous devons déterminer les valeurs propres de la hessienne évaluée en chacun d'eux. Nous commençons par calculer la hessienne :

In[4]:=
```
Hf = D[f[x, y, z], {{x, y, z}, 2}]
```

Out[4]= $\{\{48x, -12z, -12y\}, \{-12z, 6y, -12x\}, \{-12y, -12x, 60z\}\}$

Le calcul des valeurs propres de la hessienne évaluée en chacun des points critiques se fait à l'aide de la fonction `Eigenvalues` :

In[5]:=
```
Table[
  Eigenvalues[Hf /. ptsCrit[[i]] ],
  {i, 1, Length[ptsCrit]}
] // N
```

Out[5]= $\{\{-78.809, -39.5268, -1.66417\}, \{-26.8328, -5.36656, 5.36656\}, \{26.8328, -5.36656, 5.36656\}, \{78.809, 39.5268, 1.66417\}\}$

Nous pouvons alors conclure que f possède quatre extrema locaux :

(i) en $(-1;-2;-1)$ possède un maximum local car toutes les valeurs propres de la hessienne sont négatives ;

(ii) en $\left(0;0;-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ possède un point de selle car la valeurs propres sont de signes différents ;

(iii) en $\left(0; 0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$possède un point de selle car la valeurs propres sont de signes différents ;

(iv) en $(1; 2; 1)$ possède un minimum local car toutes les valeurs propres de la hessienne sont positives.

Finalement, notons que les deux extrema locaux ne sont pas globaux car la fonction $f(x, 0, 0) = 8x^3$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes et petites.

☺

2.20 Remarques

(a) Pour $n > 2$, le calcul du signe du déterminant de la hessienne ne permet pas de connaître la nature d'un point critique. Par exemple, ce déterminant est strictement positif non seulement lorsque toutes les valeurs propres sont strictement positives (cas d'un minimum local) mais aussi lorsqu'il y a un nombre pair de valeurs propres strictement négatives et que les autres sont strictement positives (cas d'un point de selle) et mais encore lorsque n est pair et toutes les valeurs propres sont négatives (cas d'un maximum local).

(b) Dans le cas où la hessienne possède une ou plusieurs valeurs propres nulles nous ne pouvons rien dire sur la nature du point critique car l'approximation par le polynôme de Taylor d'ordre 2 n'est pas « fiable » : le signe des valeurs propres de la hessienne va fluctuer à proximité du point critique.

3 Systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

Dans cette section nous allons dans un premier temps définir ce qu'est un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1 et voir les conditions garantissant l'existence et l'unicité d'une solution. Nous nous intéresserons ensuite à l'interprétation géométrique des systèmes dans un cas particulier (systèmes autonomes) puis nous verrons la résolution numérique de systèmes quelconques à l'aide de la méthode de Euler ainsi que la résolution avec Mathematica. Nous poursuivrons par l'étude de la fonction exponentielle d'une matrice. Celle-ci nous permettra de donner une formule explicite de la solution de systèmes d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants. Nous terminerons par la résolution de systèmes d'équations différentielles inhomogènes dont le système homogène associé est à coefficients constants.

Dans cette section, nous reprendrons les notations suivantes utilisées aux cours de mathématiques :

3.1 Notations

(a) $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes.

(b) I_n est la matrice identité dans $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

(c) 0_n est la matrice de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ constituée uniquement de 0.

Généralités

3.2 Définitions

Soit $t_0, x_{0,1}, \ldots, x_{0,n} \in \mathbb{R}$ et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions réelles définies dans un voisinage de $(t_0, x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$.

(a) *Un système de n équations de la forme*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f_1\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big), \end{cases}$$

*est un **système d'équations différentielles ordinaire d'ordre 1** d'inconnues $x_1(t), \ldots x_n(t)$.*

(b) *Si au système précédent nous ajoutons les conditions initiales $x_1(t_0) = x_{0,1}, \ldots x_n(t_0) = x_{0,n}$ nous parlons de **problème de Cauchy**. Ce système avec conditions initiales peut s'écrire de façon plus concise :*

$$\boxed{\dot{X}(t) = F(t, X(t)), \ \textit{avec } X(t_0) = X_0}$$

avec $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ la fonction donnant les membres de droite du système, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ la fonction inconnue et $X_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix}$ la condition initiale.

(c) *Si la fonctions F est indépendante de t nous disons que le système est* ***autonome****.*

3.3 Remarque
Le terme « ordinaire » renvoie au fait que la fonction recherchée dépend d'une seule variable (sinon nous parlons d'équations aux dérivées partielles), tandis que l'ordre 1 signifie que le système ne contient que des dérivées d'ordre 1 par rapport à cette variable.

3.4 Théorème
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ et F une fonction définie dans un voisinage de (t_0, X_0) et à valeurs dans $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Si F est partiellement différentiable[6] *alors il existe une unique solution $X(t)$ du système $\dot{X}(t) = F(t, X(t))$ satisfaisant la condition initiale $X(t_0) = X_0$.*

Sans preuve

Interprétation géométrique, méthode de Euler et résolution avec Mathematica

Dans cette sous-section, nous considérons que nous avons un système de n équations différentielles avec condition initiale

$$\dot{X} = F(t, X),\ X(t_0) = X_0,$$

satisfaisant les hypothèses du théorème 3.4. La recherche d'une solution de ce système correspond à la recherche d'une courbe X dont la fonction $\dot{X}$ donnant le vecteur « vitesse » est connue. Illustrons cela dans le cas où le système est autonome.

3.5 Exemple
Considérons une particule dont l'horaire satisfait le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -2y(t) \\ \dot{y}(t) &= 0.5x(t) + 3 \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = -1,\ y(0) = 0.$$

Cela signifie que si à un instant t la particule considérée a vecteur lieu $\vec{r}(t) = \left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right)$ alors son vecteur vitesse $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \left(\begin{smallmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{smallmatrix}\right)$ vaut $\vec{v}(t) = \left(\begin{smallmatrix} -2y(t) \\ 0.5x(t)+3 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent, si à un certain moment la particule se trouve au point de coordonnées (x, y) alors son vecteur vitesse vaut

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2y \\ 0.5x + 3 \end{pmatrix}.$$

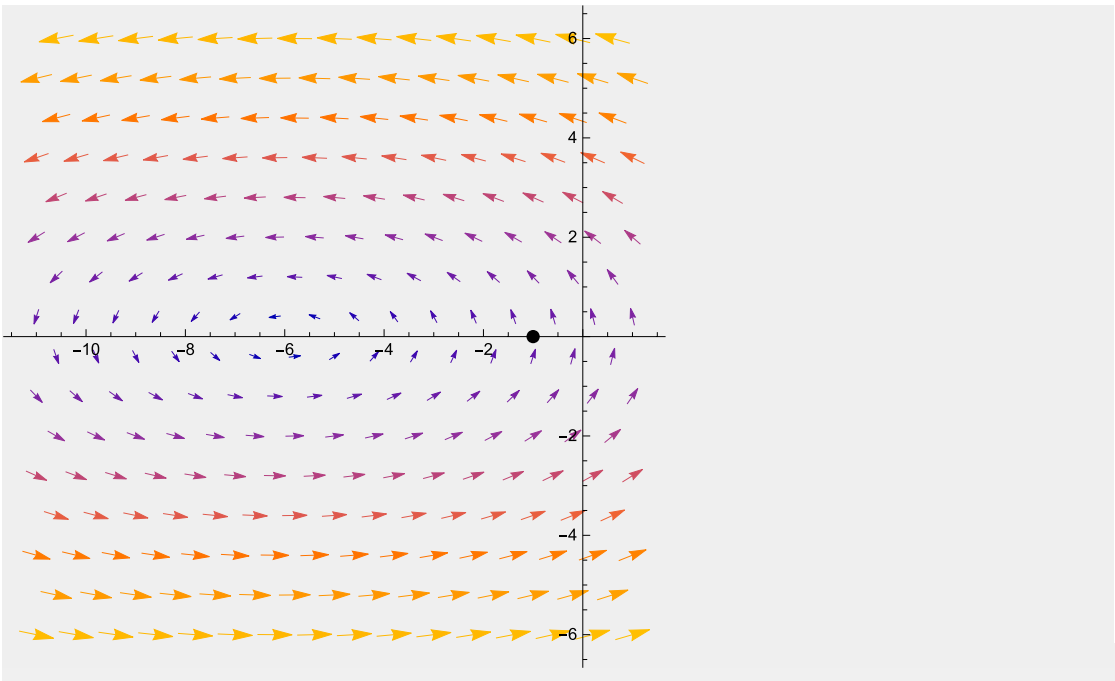
Le système d'équations différentielles étant autonome, les composantes du vecteur vitesse lorsque la particule se trouve en $(x; y)$ sont indépendantes du temps et elles définissent

6. Nous disons que la fonction F est partiellement différentiable si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ à valeurs réelles sont partiellement différentiables. Cette condition peut être affaiblie : il est suffisant que F soit continue et qu'il existe une constante $L > 0$ telle $\|f(t, X) - f(t, Y)\| \leqslant L\|X - Y\|$ pour tout t, X, Y (cette seconde condition s'appelle la condition de Lipschitz).

donc un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^2$. Dessinons-le avec Mathematica et mettons un point à la position de la particule au temps $t = 0$:

In[1]:=
```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_] := {-2 y, x/2 + 3}
condInit = {-1, 0};
champ = VectorPlot[
  f[x, y], {x, -11, 1}, {y, -6, 6},
  Epilog -> {PointSize[0.02], Point[condInit]},
  Axes -> True, Frame -> False,
  VectorScaling -> "Linear"
  (*longueur des vecteurs proportionnelle à leur norme*)
]
```

Out[1]=



La trajectoire d'une solution doit être tangente au champ vectoriel obtenu et semble être une ellipse parcourue dans le sens inverse des aiguilles de la montre. ☺

3.6 Remarque

Dans le cas où le système n'est pas autonome, le système d'équations différentielle génère un champ de vecteurs qui varie en fonction sur temps. Sa représentation graphique « sur papier » est donc problématique mais Mathematica peut nous aider à avoir une approche qualitative du système grâce la fonction `Manipulate`. Une instruction de la forme suivante permet de voir l'évolution temporelle du champ vectoriel :

In[2]:=
```
Manipulate[
  VectorPlot[
    f[t,x,y],
    {x, xMin, xMax}, {y, yMin, yMax}
  ],
  {t,tMin,tMax}
]
```

Que le système soit autonome ou pas, la **méthode de Euler** vue pour les équations différentielles ordinaires s'adapte aux systèmes d'équations différentielles. Comme $\dot{X}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{X(t+h)-X(t)}{h}$, nous avons $\dot{X}(t) \approx \frac{X(t+h)-X(t)}{h}$ pour h proche de 0 et donc

$$X(t+h) \approx X(t) + h \cdot \dot{X}(t) = X(t) + h \cdot F\big(t, X(t)\big). \tag{2}$$

Si nous avons une condition initiale $X(t_0) = X_0$ et si nous désirons estimer $X(\hat{t}),\ \hat{t} > t_0$, nous décomposons l'intervalle $[t_0; \hat{t}]$ en N intervalles de longueur $h = \frac{\hat{t}-t_0}{N}$. Nous définissons alors une suite finie

$$t_{k+1} = t_k + h,$$

$k \in \{0; 1; \dots N\}$ et pour chacune de ces valeurs de t, nous obtenons une approximation $X(t_k) \approx X_k$ définit à l'aide de l'approximation (2) :

$$\boxed{X(t_{k+1}) \approx X_{k+1} = X_k + h \cdot F(t_k, X_k),}$$

$k \in \{0; 1; \dots N\}$. Le nombre N est le **nombre de pas** de la méthode de Euler tandis que h est la **longueur du pas**.

Illustrons ce développement à l'aide d'un exemple :

3.7 Exemple

Reprenons l'exemple 3.5 dont le problème est la recherche de l'horaire $\vec{r}(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ d'une particule satisfaisant le système d'équations différentielles avec condition initiale suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -2y(t) \\ \dot{y}(t) &= 0.5x(t) + 3 \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = -1,\ y(0) = 0.$$

Dans cette situation, l'approximation (2) s'écrit

$$\vec{r}(t+h) \approx \vec{r}(t) + h \cdot \vec{v}(t).$$

Faire cette approximation consiste à considérer que le déplacement de la particule durant l'intervalle de temps $[t; t+h]$ est $h \cdot \vec{v}(t)$ ce qui signifie que que faisons l'approximation que le vecteur vitesse de la particule est constant sur cet intervalle de temps.

Supposons que nous voulons estimer la position de notre particule au temps $\hat{t} = 2$ à l'aide de la méthode de Euler connaissant la position de la particule au temps $t_0 = 0$. Nous

notons cette position $\vec{r}_0 = \vec{r}(0) = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ avec $x_0 = x(0) = -1$ et $y_0 = y(0) = 0$. Nous allons estimer $\vec{r}(\hat{t}) = \vec{r}(2)$ dans un premier temps à la main puis à l'aide Mathematica.

Pour le calcul à la main, nous allons estimer $\vec{r}(2)$ avec $N = 5$ pas. La longueur d'un pas est donc $h = \frac{\hat{t}-t_0}{N} = \frac{2-0}{5} = 0.4$. La vecteur lieu de la particule au temps $t_1 = 0.4$ est alors

$$\begin{aligned}
\vec{r}(0.4) &\approx \vec{r}_0 + h \cdot v(0) \\
&= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 0.4 \cdot \begin{pmatrix} -2y_0 \\ 0.5x_0 + 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 \\ 0.5 \cdot (-1) + 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En répétant cette opération, nous obtenons les résultats suivants :

- $\vec{r}(0.8) \approx \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right) + 0.4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2y_1 \\ 0.5x_1+3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 0.4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2\cdot 1 \\ 0.5\cdot(-1)+3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1.8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) =: \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$
- $\vec{r}(1.2) \approx \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) + 0.4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2y_2 \\ 0.5x_2+3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1.8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + 0.4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2\cdot 2 \\ 0.5\cdot(-1.8)+3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -3.4 \\ 2.84 \end{smallmatrix}\right) =: \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$
- $\vec{r}(1.6) \approx \left(\begin{smallmatrix} x_3 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right) + 0.4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2y_3 \\ 0.5x_3+3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -3.4 \\ 2.84 \end{smallmatrix}\right) + 0.4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2\cdot 2.84 \\ 0.5\cdot(-3.4)+3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -5.672 \\ 3.36 \end{smallmatrix}\right) =: \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$
- $\vec{r}(2) \approx \vec{r}_5 = \left(\begin{smallmatrix} x_4 \\ y_4 \end{smallmatrix}\right) + 0.4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2y_4 \\ 0.5x_4+3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -5.672 \\ 3.36 \end{smallmatrix}\right) + 0.4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2\cdot 3.36 \\ 0.5\cdot(-5.672)+3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -8.36 \\ 3.4256 \end{smallmatrix}\right)$

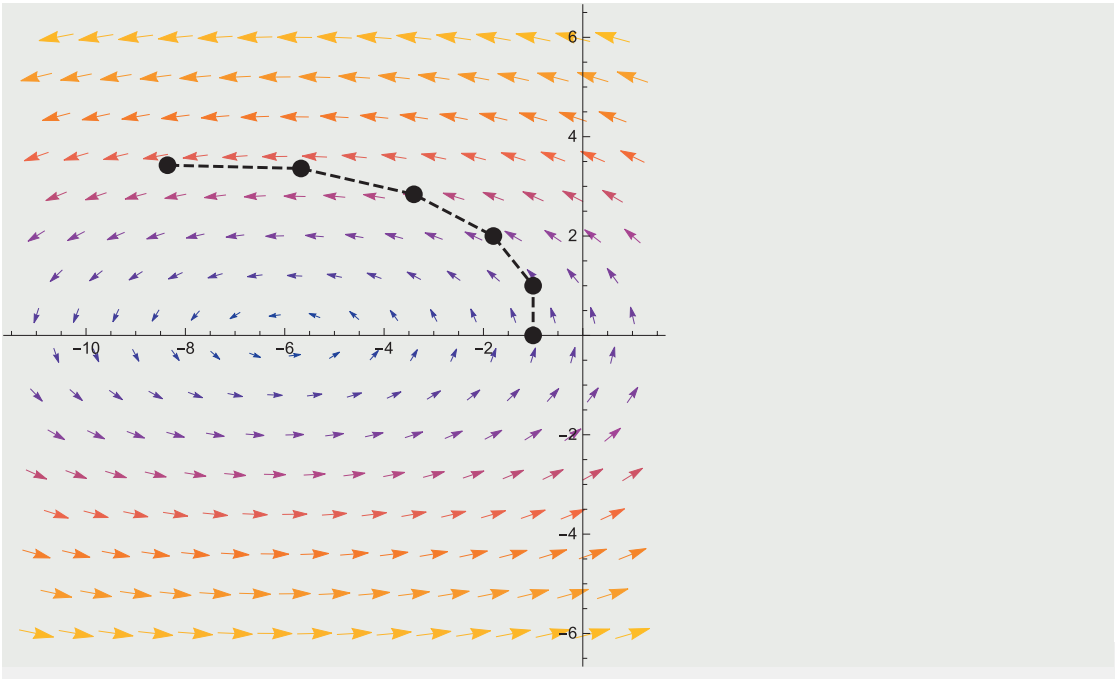
Le vecteur lieu de la particule au temps $\hat{t} = 2$ est

$$\vec{r}(2) \approx \begin{pmatrix} -8.36 \\ 3.4256 \end{pmatrix}.$$

Illustrons les calculs conduisant à ce résultat avec Mathematica :

In[3]:=
```
ptsMain = {{-1, 0}, {-1, 1}, {-1.8, 2}, {-3.4, 2.84},
   {-5.672, 3.36}, {-8.36, 3.4256}};
approxSolMain = ListPlot[
  ptsMain,
  PlotStyle -> {Black, Dashed}, (*style tracé*)
  Joined -> True,
  PlotMarkers -> {Automatic, Medium} (*style points*)
];
Show[{champ, approxSolMain}]
```

Out[3]=



Si nous travaillons avec Mathematica nous pouvons nous permettre un nombre plus important de pas. Calculons l'approximation de $\vec{r}(2)$ obtenue avec 50 pas :

In[4]:=
```
t0 = 0.; tt = 2; (*temps initial et final*)
n = 50; (*nombre de pas*)
h = (tt - t0)/n; (*longueur du pas*)
new[{x_, y_}] := {x, y} + h f[x, y]
  (*calcul d'un nouvel itéré*)
pts = NestList[new, condInit, n]; (*liste des itérés*)
pts[[-1]] (*dernier point de la liste*)
```

Out[4]= $\{-8.16054,\ 2.36709\}$

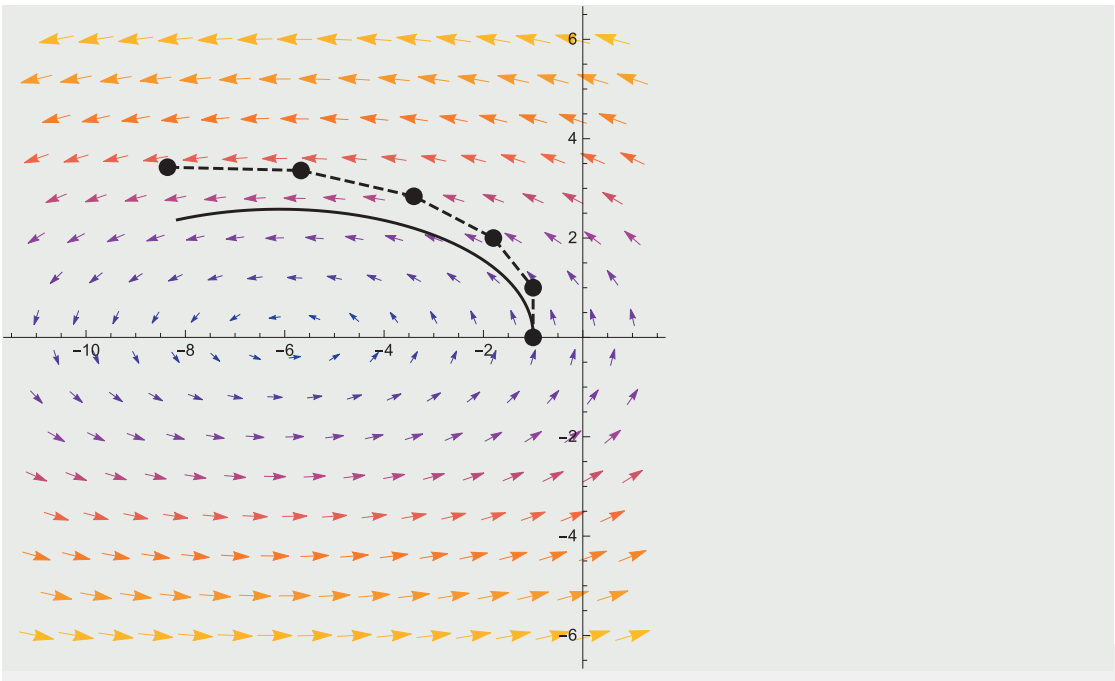
Le vecteur lieu de la particule au temps $\hat{t} = 2$ est approximativement

$$\vec{r}(2) \approx \begin{pmatrix} -8.16054 \\ 2.36709 \end{pmatrix}.$$

Comparons les approximations de trajectoire de la particule obtenues avec 5 et 50 points :

In[5]:=
```
approxSolMathica = ListPlot[pts, PlotStyle -> {Black},
   Joined -> True];
Show[{champ, approxSolMain, approxSolMathica}]
```

Out[5]=



Comparons maintenant la position au temps $\hat{t} = 2$ approximée à l'aide de la méthode de Euler avec 50 pas et la position exacte à ce moment en la calculant avec Mathematica. Pour cela nous commençons par calculer la solution exacte :

In[6]:=
```
s = DSolve[
  {x'[t], y'[t]} == f[x[t], y[t]] &&
  {x[t0], y[t0]} == condInit,
  {x[t], y[t]}, t
]
```

Out[6]=
```
{{
  x[t] -> 5. Cos[t] - 6 Cos[t]^2 - 6 Sin[t]^2,
  y[t] -> 2.5 Sin[t]
}}
```

Nous définissons maintenant la fonction `r` correspondant à l'horaire de la particule :

In[7]:=
```
r[t_] := Evaluate[{x[t], y[t]} /. s[[1]]]
```

Remarquons que nous avons dû utiliser la fonction `Evaluate` pour demander à Mathematica pour que la règle de remplacement soit effectuée avant l'évaluation en une certaine valeur de `t`. Nous calculons maintenant la position exacte au temps $t = 2$ ainsi que les erreurs absolue et relative de la méthode de Euler avec 50 pas :

In[8]:=
```
r[tt]
err = Abs[r[tt] - pts[[-1]]] (*erreur absolue*)
err/Abs[r[tt]] (*erreur relative*)
```

Out[8]=
```
{-8.08073, 2.27324}
```

Out[9]=
```
{0.0798034, 0.0938497}
```

Out[10]=
```
{0.00987576, 0.0412845}
```

Avec 50 pas, nous avons un erreur relative d'un peu moins de 1% sur $x(2)$ et d'environ 4% sur $y(2)$.

☺

3.8 Remarque
Si le système n'est pas autonome, il est intéressant d'écrire les itérations de la méthode de Euler sous la forme d'une seule matrice $(n+1) \times 1$:

$$\begin{pmatrix} t_{k+1} \\ X_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_k \\ X_k \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ F(t_k, X_k) \end{pmatrix}.$$

Pour un système de deux équations, la fonction Mathematica permettant de passer d'un pas à l'autre est alors de la forme suivante :

In[11]:=
```
new[{t_, {x_, y_}}] := {t, {x, y}} + h {1, f[t, x, y]}
```

Exponentielle d'une matrice

Considérons l'équation différentielle ordinaire linéaire homogène

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

Par séparation des variables, nous obtenons la solution générale

$$x(t) = k \cdot e^{at},\ k \in \mathbb{R}.$$

Nous verrons que ce résultat se généralise aux systèmes d'équations différentielles dans le cas où celui-ci est de la forme

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) \text{ avec } A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

Nous montrerons que la solution générale d'un tel système se calcule à l'aide de l'exponentielle matricielle et vaut

$$X(t) = \exp(tA) \cdot C,\ C \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

Il nous faut par conséquent définir l'exponentielle d'une matrice et étudier ses propriétés. C'est ce que nous allons faire dans cette sous-section.

Nous commençons par définir les puissances entières d'une matrice :

3.9 Définitions
Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) $A^k := \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ facteurs}}$

(b) *Si $A \neq 0_n$ alors $A^0 := I_n$.*

(c) *Si A est inversible alors $A^{-k} := (A^{-1})^k$.*

3.10 Propriété
La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ converge[7] *pour toute matrice carrée A.*

Sans preuve.

3.11 Définition
*L'**exponentielle** d'une matrice carrée A d'ordre n, notée $\exp(A)$, est la somme de la série $I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Nous avons donc*

$$\boxed{\exp(A) := I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I_n + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots}$$

3.12 Remarque
La définition précédente est une généralisation de la définition de l'exponentielle réelle. En effet, la définition rigoureuse de l'exponentielle d'un nombre $z \in \mathbb{C}$ est

$$\exp(z) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

et cette série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il est possible de montrer que pour $x \in \mathbb{Q}$ cette définition correspond à la définition d'une puissance dont la base est e, le nombre de Euler :

$$\exp(x) = e^x.$$

A l'aide de cette définition de l'exponentielle il est alors possible de définir rigoureusement les puissances de base $a \in \mathbb{R}_+^*$ et d'exposant $z \in \mathbb{C}$ quelconque :

$$a^z = \exp\big(\ln(a) \cdot z\big).$$

3.13 Propriétés
Soit $A = (a_{ij})$ et B des matrices carrés d'ordre n.

(a) $\exp(0_n) = I_n$

(b) *S'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ telle que $A^N = 0_n$ (on dit alors que A est nilpotente) alors l'exponentielle de A est une somme finie :*

$$\exp(A) = I_n + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} A^k = I_n + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots + \frac{1}{(N-1)!} A^{N-1}.$$

7. Une série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ de matrices $A_k = (a_{k,ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ d'ordre n est convergente si les séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,ij}$ convergent pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nous avons donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,ij} \right).$$

(c) *Si A une matrice diagonale alors* $\exp(A)$ *est une matrice diagonale dont les éléments sont les exponentielles de éléments de la diagonale de A. Plus précisément, nous avons*

$$\boxed{\exp\begin{pmatrix} a_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(a_{11}) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp(a_{nn}) \end{pmatrix}}$$

(d) *S'il existe une matrice inversible P et une matrice $\hat{A}$ telles que $A = P \cdot \hat{A} \cdot P^{-1}$ alors*

$$\boxed{\exp(A) = P \cdot \exp(\hat{A}) \cdot P^{-1}.}$$

(e) *Pour $t \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\exp(tA) = A \cdot \exp(tA) = \exp(tA) \cdot A.}$$

(f) *Si $AB = BA$ alors*

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

Démonstration
Pour les propriétés 3.13(a), (b), (c) et (d), voir l'exercice 24 ; pas de preuve pour les autres propriétés. □

3.14 Remarque
La propriété 3.13(d) nous montre l'importance de trouver un base dans laquelle l'exponentielle est facile à calculer. Un cas vu dans le cadre du cours de mathématiques est celui où une base constituée exclusivement de vecteurs propres existe. Dans ce cas nous avons $A = P^{-1} \cdot \hat{A} \cdot P$ avec $\hat{A}$ une matrice diagonale. Malheureusement une telle base n'existe pas toujours. Une solution de ce problème est fournie par la réduction à la forme normale de Jordan mais ceci sort du cadre de notre cours (pour plus de détails voir par exemple l'article Wikipedia sur la réduction de Jordan).

Utilisons la propriété 3.13(d) pour calculer l'exponentielle d'une matrice

3.15 Exemple
Calculons l'exponentielle de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous commençons par déterminer les valeurs propre de A. Pour cela, nous calculons χ_A, le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda I_2) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 0.5 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Les valeurs propres de A étant les zéros de χ_A, nous constatons qu'il n'existe pas de valeur propre réelle. Cependant toute la théorie sur les endomorphisme d'espaces vectoriels réels qui a été vue au cours de mathématiques se généralise de façon naturelle sur les espaces vectoriels complexes[8] (par naturel nous entendons que toutes les propriétés restent valables en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$). Nous pouvons donc considérer les valeurs propres complexes

$$\lambda_1 = i \text{ et } \lambda_2 = -i.$$

Nous cherchons maintenant des générateurs V_1 et V_2 des espaces propres associés à ces valeurs propres. Pour de tels vecteurs, nous devons avoir

$$M \cdot V_i = \lambda_i V_i, \ i = 1, 2. \tag{3}$$

Posons $V_1 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et l'équation (3) nous donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -2y &= ix \\ 0.5x &= iy \end{cases}$$

Comme prévu, ces deux équations sont équivalentes (en effet, en multipliant les membres de la seconde équation par $2i$ nous obtenons la première). Nous pouvons alors choisir

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Posons $V_2 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et l'équation (3) nous donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -2y &= -ix \\ 0.5x &= -iy \end{cases}$$

Là aussi, comme prévu, nous obtenons deux équations équivalentes (en effet, en multipliant les membres de la seconde équation par $-2i$ nous obtenons la première). Nous pouvons alors choisir

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors

$$A = P \cdot \hat{A} \cdot P^{-1} \text{ avec } \hat{A} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

8. Les propriétés d'un espace vectoriel complexe sont similaires à celle d'une espace vectoriel réel. La différence réside dans la multiplication par un scalaire : dans les espaces vectoriels complexes les scalaires sont les nombres complexes au lieu des nombres réels.

Nous pouvons maintenant utiliser la propriété 3.13(d) pour calculer l'exponentielle de A :

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= P \cdot \exp(\hat{A}) \cdot P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -i & i \end{pmatrix} \cdot \exp \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -i & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^i & 0 \\ 0 & e^{-i} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} i & -2 \\ i & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -i & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^i & 0 \\ 0 & e^{-i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & -2 \\ i & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -i & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ie^i & -2e^i \\ ie^{-i} & 2e^{-i} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 2ie^i + 2ie^{-i} & -4e^i + 4e^{-i} \\ e^i - e^{-i} & 2ie^i + 2ie^{-i} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 2i(e^i + e^{-i}) & -4(e^i - e^{-i}) \\ e^i - e^{-i} & 2i(e^i + e^{-i}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Posons $z = e^i$. Nous avons alors $\bar{z} = e^{-i}$ et

$$\exp(A) = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 2i(z + \bar{z}) & -4(z - \bar{z}) \\ z - \bar{z} & 2i(z + \bar{z}) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Comme $|z| = 1$ et $\arg(z) = 1$, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}
z + \bar{z} &= 2\,\mathrm{Re}(z) \\
&= 2|z| \cos\big(\arg(z)\big) \\
&= 2\cos(1)
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
z - \bar{z} &= 2i\,\mathrm{Im}(z) \\
&= 2i|z| \sin\big(\arg(z)\big) \\
&= 2i\sin(1).
\end{aligned}$$

En insérant ces deux derniers résultats dans l'équation (4) nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 2i \cdot 2\cos(1) & -4 \cdot 2i\sin(1) \\ 2i\sin(1) & 2i \cdot 2\cos(1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 4i\cos(1) & -8i\sin(1) \\ 2i\sin(1) & 4i\cos(1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(1) & -2\sin(1) \\ 0.5\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En admettant des valeurs propres *complexes*, nous avons réussi à calculer l'exponentielle d'une matrice à coefficients *réels* !

Vérifions avec Mathematica :

In[12]:=
```
A = {{0, -2}, {1/2, 0}};
MatrixExp[A] // MatrixForm
```

Out[12]= $\begin{pmatrix} \cos(1) & -2\sin(1) \\ \frac{\sin(1)}{2} & \cos(1) \end{pmatrix}$

☺

3.16 Remarque

Dans l'exemple précédent, nous avons obtenus dans valeurs propres et des vecteurs propres conjugués : ceci est une propriété qui est toujours vérifiée. En effet, si A est une matrice *réelle* possédant une valeur propre λ dont X est un générateur de l'espace propre alors

$$A \cdot \overline{X} = \overline{A \cdot X} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda}\overline{X}.$$

Systèmes linéaires

3.17 Définitions

Un système de n équations différentielles ordinaires d'ordre 1 est ***linaire*** *s'il est de la forme*

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t),$$

avec $A(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $B(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Si $B = 0$, le système est ***homogène****, sinon il est* ***inhomogène****. Si $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions constantes alors le système est* ***à coefficients constants****.*

3.18 Exemples

(a) L'exemple repris tout au long de cette section dont le problème est la recherche de l'horaire $\vec{r}(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ d'une particule satisfaisant le système d'équations différentielles avec condition initiale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -2y(t) \\ \dot{y}(t) &= 0.5x(t) + 3 \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = -1,\ y(0) = 0$$

est un système d'équations différentielles linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. En effet, ce système peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n est une équation de la forme

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

dont l'inconnue est une fonction réelle x. Toute équation de ce type peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations différentielles linéaire d'ordre 1. Pour cela, il suffit de définir de nouvelles fonctions inconnues $x_k(t) := x^{(k)}(t),\ k = 0, \ldots, n-1$ (nous avons donc $x(t) = x_0(t)$). Ces nouvelle fonctions doivent satisfaire les équations

$$\dot{x}_{k-1}(t =)x_k(t),\ k = 1, \ldots, n-1$$

et, comme $\dot{x}_{n-1}(t) = \frac{d}{dt}x^{(n-1)}(t) = x^{(n)}(t)$, l'équation différentielle d'ordre n peut s'écrire à l'aide de ces nouvelles fonctions inconnue de la façon suivant :

$$\dot{x}_{n-1}(t) = a_{n-1}(t)x_{n-1}(t) + \dots a_1(t)x_1(t) + a_0(t)x_0(t) + b(t)$$

Le système d'équations que doivent satisfaire les fonction $x_0, \dots, x_{n-1}$ peut alors s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-2}(t) \\ \dot{x}_{n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-2}(t) \\ x_{n-1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

(c) Si un système est non-linéaire, il est possible de le linéariser à l'aide d'un développement de Taylor d'ordre 1 et ainsi d'avoir approche qualitative du comportement de la solution (pour un exemple concret, voir l'exercice 33).

☺

3.19 Théorème
Soit $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t)$ un système d'équations différentielles linéaire d'ordre 1 et X_p une solution particulière du système. Une fonction X est une solution du système si et seulement si X est la somme de X_p avec une solution X_h du système homogène associé $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$.

Démonstration
Soit X_p une solution particulière du système. Nous avons donc

$$\dot{X}_p = A \cdot X_p + B. \tag{5}$$

Nous démontrons maintenant les deux sens de l'équivalence.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit X un solution du système. Nous avons donc

$$\dot{X} = A \cdot X + B. \tag{6}$$

Nous posons $X_h = X - X_p$ et il faut montrer que X_h est une solution du système homogène associé :

$$\dot{X}_h = \dot{X} - \dot{X}_p = (A\dot{X} + B) - (A\dot{X}_p + B) = A(X - X_p) = AX_h.$$

La deuxième égalité découle des équations (5) et (6).

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit X_h une solution du système homogène associé. Nous avons donc

$$\dot{X}_h = A \cdot X_h. \tag{7}$$

Par hypothèse, nous avons $X = X_p + X_h$ et il faut montrer que X est une solution du système inhomogène :

$$\dot{X} = \dot{X}_p + \dot{X}_h = (AX_p + B) + (AX_h) = A(X_p + X_h) + B = AX + B.$$

La deuxième égalité découle des équations (5) et (7).

□

En d'autres termes, le théorème 3.19 signifie que la solution générale X d'un système d'équations linéaires d'ordre 1 est la somme d'une solution particulière X_p de celui-ci et de la solution générale X_h du système homogène associé :

$$\boxed{X = X_p + X_h.}$$

Pour savoir résoudre un système d'équations différentielles linéaire d'ordre 1, il faut donc être capable, d'une part, de trouver une solution particulière de celui-ci et, d'autre part, de trouver la solution générale du système homogène associé. Le théorème suivant nous donne une formule explicite de cette dernière dans le cas où les coefficients sont constants :

3.20 Théorème
Soit $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$ un système d'équations différentielles linéaires homogène à coefficients constants. Pour toute condition initiale il existe une $C \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\boxed{X_h(t) = \exp(At) \cdot C}$$

soit une solution du système avec condition initiale.

Démonstration
Nous commençons par montrer que $X_h(t) = \exp(tA) \cdot C$ est une solution du système homogène :

$$\frac{d}{dt}\big(\exp(tA) \cdot C\big) = \left(\frac{d}{dt}\exp(tA)\right) \cdot C = \big(A \cdot \exp(tA)\big) \cdot C = A \cdot \big(\exp(tA) \cdot C\big) = AX_h.$$

Le première égalité vient de la validité de la généralisation aux matrices de la règle de dérivation d'un produit (sans preuve) et du fait que la matrice C est constante. La seconde égalité se justifie par la propriété 3.13(e).

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Il faut maintenant montrer qu'il existe $C \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ telle que $X_h(t) = \exp(tA) \cdot C$ satisfasse la condition initiale $X(t_0) = X_0$. Nous cherchons donc C telle que

$$\exp(tA_0) \cdot C = X_0.$$

Comme $\big(\exp(tA_0)\big)^{-1} = \exp(-tA_0)$ (pour une preuve, voir l'exercice 25), nous posons

$$C = \big(\exp(tA_0)\big)^{-1} \cdot X_0 = \exp(-tA_0) \cdot X_0.$$

□

Nous terminons cette section pas la résolution de analytique de l'exemple qui l'a jalonné

3.21 Exemple
Le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -2y(t) \\ \dot{y}(t) &= 0.5x(t) + 3 \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = -1,\ y(0) = 0$$

est un système d'équations différentielles linéaire inhomogène à coefficients constants qui peut s'écrire

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r} + \vec{b},\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

avec $\vec{r}(t) = \left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{r}_0 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(1) **Solution du système homogène associé** Le système homogène associé est

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$$

et, par le théorème 3.20 sa solution générale est

$$\vec{r}_h(t) = \exp(tA) \cdot \vec{c},\ \vec{c} \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}).$$

Par un calcul analogue à celui de $\exp(A) = \exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ qui a été traité dans l'exemple 3.15 (les valeurs propres sont ici $\pm ti$ au lieu de $\pm i$) nous obtenons

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -2\sin(t) \\ 0.5\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Si nous posons $\vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right)$, nous avons donc

$$\vec{r}_h(t) = \exp(tA) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -2\sin(t) \\ 0.5\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) **Solution particulière du système** Une solution particulière simple est une fonction constante. Si nous faisons l'hypothèse qu'une telle fonction est une solution alors elle doit satisfaire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 0 &= -2y \\ 0 &= 0.5x + 3 \end{cases}$$

La première équation nous donne $y = 0$ et la seconde $x = -6$. Nous avons donc la solution particulière suivante :

$$\vec{r}_p(t) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) **Solution générale du système inhomogène** La solution générale $\vec{r}$ du système inhomogène est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_p(t) + \vec{r}_h(t) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) & -2\sin(t) \\ 0.5\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

(4) **Solution du système avec condition initiale** Nous devons avoir $\vec{r}(0) = \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ donc c_1, c_2 doivent satisfaire les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos(0) & -2\sin(0)\\0.5\sin(0) & \cos(0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il s'en suit que $c_1 = 5$ et $c_2 = 0$ et la solution du système avec condition initiale est

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos(t) & -2\sin(t)\\0.5\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-6+5\cos(t)\\2.5\sin(t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

L'horaire trouvé correspond aux équations paramétriques d'une ellipse centrée en $(-6;0)$ dont le grand axe est horizontal et mesure 10 unités et dont le petit axe est vertical et mesure 5 unités ce qui correspond à l'intuition initiale donnée par le champ vectoriel du système.

☺

4 Exercices

Chiffre de Hill

***Exercice* 1 (sans Mathematica)**
Soit la matrice de chiffrement

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous chiffrons modulo 26 des messages écrits sans espace avec les 26 lettres de l'alphabet codées selon leur position (0 pour `a`,...).

(a) Chiffrer le mot `orange`.

(b) Déchiffrer le cryptogramme `JXKH` en utilisant l'équivalence

$$C \equiv M \cdot P \pmod{26} \Longleftrightarrow P \equiv M^{-1} \cdot C \pmod{26}.$$

***Exercice* 2 (avec Mathematica)**
Traiter l'exemple 1.1 de la théorie avec Mathematica. Soigner le code de façon à ce qu'une modification de la donnée modifie automatiquement le résultat lors d'une réévaluation du cahier.

***Exercice* 3 (sans Mathematica)**
Calculer l'inverse modulo 26 de la matrice M et le donner avec des coefficients dans $\mathbb{Z}_{26} = \{0; 1; 2; \ldots; 25\}$.

(a) $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $M = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $M = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

***Exercice* 4 (sans Mathematica)**
Déchiffrer le cryptogramme `COIE` sachant qu'il a été construit modulo 26 en codant les lettres de l'alphabet selon leur position (0 pour `a`,...) avec la matrice de chiffrement

$$M = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

***Exercice* 5 (avec Mathematica)**
Traiter l'exemple 1.3 de la théorie avec Mathematica. Soigner le code de façon à ce qu'une modification de la donnée modifie automatiquement le résultat lors d'une réévaluation du cahier.
Indication : Mathematica sait calculer l'inverse modulaire d'une matrice.

***Exercice* 6 (sans Mathematica)**
Pour crypter un message, Alice et Bob ont convenu d'utiliser la matrice de chiffrement

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{pmatrix}$$

et de chiffrer modulo 26 des messages écrits en codant les 26 lettres de l'alphabet selon leur position (0 pour `a`,...) Alice rédige le message `vivelavie` et l'envoie à Bob après l'avoir chiffré.

(a) Montrer que Alice et Bob ont choisi convenablement leur matrice chiffrement.

(b) Ève espionne Alice et Bob depuis longtemps[9] et intercepte le message envoyé par Alice à Bob. Quel message lit-elle ?

(c) Ève est frustrée car elle n'arrive pas à décrypter le message. Elle espionne Bob et arrive partiellement à lire la matrice de déchiffrement

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 21 & ? & 21 \\ 21 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer l'élément manquant.

***Exercice* 7 (sans Mathematica)**
L'horloge ci-contre a ses aiguilles des heures et des minutes qui se déplacent uniquement lorsque la trotteuse[10] passe sur le 12. Déterminer le temps minimal qu'il faut attendre pour voir les aiguilles des minutes et des heures se superposer durant 60 secondes.

9. Parmi les figures classiques de cryptologie outre Ève qui est une écouteuse externe (de l'anglais « eavesdropper ») des messages échangés n'ayant pas la possibilité de les modifier nous pouvons aussi citer Trudy une intruse (de l'anglais « trespasser ») qui peut non seulement accéder aux messages en transit mais en plus les modifier et Mallory (pour « malicious ») qui peut en plus encore mettre des messages en transit (source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Alice_et_Bob, consultée le 24.2.2023)

10. La trotteuse est un autre nom pour l'aiguille des secondes.

***Exercice* 8 (avec Mathematica)**
Déchiffrer le cryptogramme `MUBBVFDWWYFT` sachant qu'il a été construit modulo 26 en codant les lettres de l'alphabet selon leur position (0 pour `a`,...) avec la matrice de chiffrement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soigner le code de façon à ce qu'une modification de la donnée modifie automatiquement le résultat lors d'une réévaluation du cahier.

***Exercice* 9 (avec Mathematica)**
Soit la matrice de chiffrement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Nous chiffrons modulo 256 des messages en les codant à l'aide du code ASCII.

(a) Montrer que la matrice M a été convenablement choisie sans calculer explicitement son inverse.

(b) Chiffrer `Il était une fois dans l'Ouest` (laisser le résultat sous forme codée).

(c) Facultatif : soigner le code de façon à ce qu'il fonctionne aussi

  (i) si l'ordre k de la matrice est changé et

  (ii) si la longueur du message n'est pas un multiple de k (il faut tester si la longueur du message est un multiple de k et si nécessaire redéfinir le message en lui ajoutant des espaces, pour cela travailler par exemple avec les fonctions `Mod`, `If` et `For`).

***Exercice* 10 (avec Mathematica)**
Alice et Bob s'échangent des messages en les codant à l'aide de code ASCII et puis en les chiffrant par trigrammes (c'est-à-dire par paquets de 3 codes) avec le chiffre de Hill modulo 284. Alice a envoyé le message suivant à Bob :

```
{110, 281, 230, 83, 195, 112, 230, 173, 202, 21, 283, 78, 206, 235,
272, 275, 222, 135, 46, 243, 112, 148, 85, 257, 165, 14, 44, 21, 59,
154, 103, 40, 41, 100, 238, 11, 259, 96, 34, 126, 80, 235, 165, 14,
44, 83, 264, 127, 266, 9, 48, 240, 65, 149, 58, 220, 20, 163, 193,
46, 151, 231, 45, 204, 43, 199, 42, 251, 276, 25, 3, 14, 281, 66,
164, 253, 96, 255, 252, 121, 45, 119, 223, 282, 223, 173, 49, 51, 26,
263, 70, 86, 158}
```

Ève qui les espionnent a réussi a obtenir le déchiffrement du début du message :

```
Le monde se divise
```

(a) Déterminer la matrice de déchiffrement que doit utiliser Bob.

(b) Déchiffrer la message envoyé par Alice.

Optimisation à plusieurs variables

***Exercice* 11 (sans Mathematica)**
Soit la fonction $f(x, y) = -2x^2 + 4xy + y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

(a) Déterminer la matrice carrée M d'ordre 2 qui est symétrique par rapport à sa diagonale descendante telle que f puisse s'écrire à l'aide de la multiplication matricielle et du produit scalaire sous la forme suivante :

$$f(x, y) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

(b) Déterminer les valeurs propres ainsi que des générateurs des espaces propres de M. Vérifier que ceux-ci sont orthogonaux.

(c) Calculer le déterminant de M. Que constate-t-on ? Justifier.

(d) Déterminer une formule permettant de calculer l'image par f d'un vecteur w quelconque qui est colinéaire à un vecteur propre de M à l'aide de l'écriture matricielle de M.

(e) Interpréter graphiquement vos résultats.

***Exercice* 12 (sans Mathematica)**
Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $m : E \to E$ une application linéaire de matrice M.

(a) En travaillant avec une matrice carrée d'ordre 2 de coefficients quelconques, en choisissant judicieusement des vecteurs $v, w \in E$ puis en calculant les produis scalaires $\langle m(v), w\rangle$ et $\langle v, m(w)\rangle$, montrer que si m est un endomorphisme symétrique alors ${}^tM = M$.

(b) En travaillant avec la produit scalaire comme multiplication matricielle (voir la remarque 2.2(a)), montrer que si ${}^tM = M$ alors m est un endomorphisme symétrique.

***Exercice* 13 (sans Mathematica)**
Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ la matrice d'un endomorphisme symétrique de E. Montrer que l'ensembles des valeurs propres de M est non vide et est égal à

$$\left\{ \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \right\}.$$

***Exercice* 14 (sans Mathematica)**
Montrer que la condition $v \neq 0$ ne peut être enlevée dans l'énoncé du lemme 2.6.

Nécessité de la condition $v \neq 0$ montrée dans l'exercice

***Exercice* 15 (sans Mathematica)**
Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et M la matrice d'un endomorphisme symétrique de E. A l'aide du théorème spectral, montrer que $\mathrm{Det}(M) = \lambda_1\lambda_2$, où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres correspondant à chacun des espaces propres de M.

***Exercice* 16 (sans Mathematica)**
Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2, m un endomorphisme symétrique de E et $(e'_1; e'_2)$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de m dont λ_1, λ_2 sont les valeurs propres associées. Montrer que si v un vecteur de E avec $v = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2$ alors $\langle v, m(v)\rangle = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2$.

***Exercice* 17 (sans Mathematica)**
Montrer que si a est un point critique d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois continument différentiable alors le développent de Taylor d'ordre 2 de f peut s'écrire $f(x) \approx f(a) + \langle \nabla f(a), x - a\rangle + \frac{1}{2}\langle x - a, h_{f,a}(x - a)\rangle$, où $h_{f,a}$ est un endomorphisme dont la matrice est la hessienne de f en a.

***Exercice* 18 (sans Mathematica)**
Soit la fonction

$$f(x, y, z) = x^3 + xz^2 - 3x^2 + y^2 + 2z^2$$

définie pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.

***Exercice* 19 (avec Mathematica)**
Soit la fonction

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + xy + yz$$

définie pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.

***Exercice* 20 (avec Mathematica)**
Un liquide est chauffé puis sa température est mesurée lorsque celui-ci refroidit. La tableau suivant contient les résultats obtenus :

t [min.]	0	6	12	18	24
θ [°C]	98	68	56	50	45

(a) Ajuster à ces données une fonction de la forme $\theta(t) = a \cdot b^t + c$ à l'aide de la méthode des moindres carrées sans utiliser les fonctions d'ajustement de Mathematica. Vérifier par calcul que la courbe trouvée minimise effectivement la somme des carrés.

(b) Vérifier le point précédent à l'aide de la fonction d'ajustement appropriée de Mathematica

(c) Représenter dans un même graphique le graphe de l'ajustement précédent et les points correspondant aux mesures faites.

Soigner le code : une modification d'une donnée doit se répercuter sur l'ensemble du cahier lors d'une réévaluation.

Systèmes d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1

Exercice 21 (sans/avec Mathematica)

Nous voulons modéliser l'évolution conjointe de deux espèces dans le cas où une des deux espèces, la proie, a de la nourriture en suffisance et la seconde espèce, le prédateur, se nourrit de proies. Notons $R(t)$ le nombre de proies et $W(t)$ le nombre de prédateurs au temps t (R comme rabbit et W comme wolf). S'il n'y a aucun prédateur, nous supposons que la variation du nombre de proies est proportionnelle au nombre de proies. Nous avons donc une équation différentielle de la forme $\dot{R} = kR$ pour k une constante positive. S'il n'y a aucune proie, le nombre de prédateurs décroît et nous supposons cette décroissance proportionnelle au nombre de prédateurs. Nous avons donc une équation différentielle de la forme $\dot{W} = -rW$ avec une constante r une constante positive. Si des prédateurs et des proies sont simultanément présents, nous supposons que la principale cause de mort des proies est de se faire manger par des prédateurs. Nous pouvons alors considérer que le nombre de proies satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\dot{R} = kR - aRW,\ a, k > 0.$$

Par contre, plus il y a de proies plus le nombre de prédateurs peut augmenter et nous pouvons faire l'hypothèse que nous avons l'équation différentielle suivante :

$$\dot{W} = -rW + bRW,\ b, r > 0$$

Ces deux dernières équations s'appelle les **équations de prédation de Lotka-Volterra**. Ce modèle est aussi désigné sous le terme de « **modèle proie-prédateur** ». Il a été proposé indépendamment par Alfred James Lotka en 1925 et Vito Volterra en 1926.
Pour cet exercice nous considérons les équations de prédations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{R} &= 0.08R - 0.001RW \\ \dot{W} &= -0.02W + 0.00002RW \end{cases} \quad \text{avec } R(0) = 2000,\ W(0) = 40.$$

(a) A l'aide de Mathematica, dessiner le champ vectoriel correspondant à ce système d'équations différentielles pour $(R; W) \in [0; 3500] \times [0; 150]$.

(b) A partir du graphique précédent, que peut-on dire sur l'évolution à court terme du nombre de prédateurs et de proies ? Interpréter.

(c) Sans Mathematica, calculer pour combien de prédateurs et de proies il n'y a pas d'évolution du nombre d'individus de chaque population.

(d) A l'aide de la méthode de Euler, sans arrondir les résultats intermédiaires, déterminer le nombre d'individus de chaque population au temps $t = 10\ldots$

  (i) …sans Mathematica avec 5 pas.

  (ii) …avec Mathematica avec 50 pas.

(e) A l'aide de la fonction appropriée de Mathematica, résoudre numériquement ce système d'équations différentielles pour $t \in [0; 200]$.

  (i) Calculer avec la solution obtenue le nombre de prédateurs et de proies au temps $t = 10$.

  (ii) Tracer dans un même repère la courbe obtenue et le champ vectoriel correspondant à ce système.

D'après : Stewart, J. *Calculus, concept and contexts.* Brooks/Cole, 2010.

***Exercice* 22 (sans Mathematica)**
Calculer l'exponentielle des matrices suivantes à partir de la définition de cette fonction.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

***Exercice* 23 (Sans Mathematica)**
Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ à partir de la définition de l'exponentielle matricielle.

(b) Calculer $\exp(A+B) - \exp(A) \cdot \exp(B)$. Que constatez-vous ?

***Exercice* 24 (Sans Mathematica)**
Donner une formule pour calculer l'exponentielle des matrices carrées d'ordre n suivantes à partir de la définition de cette fonction.

(a) 0_n

(b) A si A est nilpotente, c'est-à-dire s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = 0_n$.

(c) $B = (b_{ij})$ si B est un matrice diagonale.

(d) C s'il existe une matrice inversible P et une matrice $\hat{C}$ telles que $C = P \cdot \hat{C} \cdot P^{-1}$. Indication : commencer par montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ nous avons $C^k = P \cdot \hat{C}^k \cdot P^{-1}$.

***Exercice* 25 (sans Mathematica)**
Soit $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. En utilisant la propriété 3.13(f), montrer que

$$\big(\exp(A)\big)^{-1} = \exp(-A).$$

***Exercice* 26 (Sans Mathematica)**
Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer l'exponentielle de la matrice M en la diagonalisant.

(b) Déduire du point précédent l'exponentielle de tM, $t \in \mathbb{R}$.

***Exercice* 27 (sans Mathematica)**
Calculer l'exponentielle des matrices suivantes en les diagonalisant :

(a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} -17\pi & -29\pi \\ 10\pi & 17\pi \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

***Exercice* 28 (sans/avec Mathematica)**
Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 2y + 7 \\ \dot{y} &= x - 3 \end{cases}$$

(a) Avec Mathematica,tracer le champ vectoriel généré par le système sur $[-10; 10] \times [-10; 10]$ et donner un approche qualitative des courbes solutions du système.

(b) Sans Mathematica,...

  (i) ...résoudre le système avec la condition initiale $x(0) = 0,\ y(0) = -5$.

  (ii) ...déterminer la nature de la courbe obtenue.

(c) Sans Mathematica,...

  (i) ...résoudre le système avec la condition initiale $x(0) = -5,\ y(0) = 1$.

  (ii) ...étudier l'évolution de cette solution lorsque t augmente.

(d) Facultatif : faire une animation Mathematica représentant le champ vectoriel généré par le système ainsi que la variation du graphe de la solution obtenue en fonction de la condition initiale donnée dans $[-10; 10] \times [-10; 10]$. Pour cela commencer par définir un module `grapheSol[x0,y0]` qui trace le champs vectoriel ainsi que le graphe de la solution obtenue pour la condition initiale $x(0) = x0,\ y(0) = y0$.

***Exercice* 29 (avec Mathematica)**
Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} -5\dot{x} &= x + 18y \\ -5\dot{y} &= 3x + 4y \end{cases}$$

(a) Sans utiliser les fonctions de Mathematica pour la résolution d'équations différentielles ou le calcul de l'exponentielle matricielle, calculer la solution générale exacte de ce système.

(b) Montrer que la solution générale de ce système peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \hat{c}_1 V_1 e^{\alpha_1 t} + \hat{c}_2 V_2 e^{\alpha_2 t}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ V_1, V_2 \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ fixés et $\hat{c}_1, \hat{c}_2 \in \mathbb{R}$ quelconques.

(c) Utiliser le résultat précédent afin de donner une interprétation qualitative de la solution du système en fonction de la condition initiale imposée.

***Exercice* 30 (sans Mathematica)**
Résoudre l'équation différentielle avec conditions initiales suivante :

$$12 + 6x - \dot{x} = \ddot{x} \quad \text{avec } \dot{x}(0) = -8 \text{ et } x(0) = -1.$$

***Exercice* 31 (sans/avec Mathematica)**
Une particule de masse m et de charge q avec une position $\vec{r}_0$ et une vitesse $\vec{v}_0$ au temps t_0 se déplace dans un champ magnétique constant $\vec{B}_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Déterminer le système d'équations différentielles que doit satisfaire la vitesse $\vec{v}$ de la particule.

(b) Sans Mathematica et sans faire d'Ansatz, calculer la solution générale de ce système.

(c) Sans Mathematica, calculer l'horaire de la particule pour les valeurs ci-dessous et déterminer la nature de sa trajectoire.

$$\frac{qB_0}{m} = 1000\,\mathrm{s}^{-1},\ \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{m},\ \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 10^5 \\ 0 \\ 2\cdot 10^5 \end{pmatrix}\mathrm{ms}^{-1},\ t_0 = 0\,\mathrm{s}.$$

(d) Avec Mathematica, vérifier les résultats du point précédent et tracer la trajectoire de la particule pour $t \in [0; 0.03]$.

(e) Avec Mathematica, tracer la trajectoire de la particule pour $t \in [0; 0.03]$ après avoir fait une résolution numérique du système d'équations différentielles dans le cas où le champ magnétique $\vec{B}$ n'est pas constant mais est donné par la fonction

$$\vec{B}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \cdot 1.0005^z \end{pmatrix}$$

et en reprenant les valeurs données au point précédent.

***Exercice* 32 (avec Mathematica)**
Une masse m est suspendue à un fil de longueur l et subit une force de frottement négligeable. Au temps $t = 0$, le fil est tendu, fait un angle de 30° avec la verticale puis la masse est lâchée.

(a) En dérivant l'équation de conservation de l'énergie mécanique, déterminer l'équation différentielle avec conditions initiales que doit satisfaire la fonction φ donnant l'angle que forme le fil avec la verticale.

(b) Afin de résoudre cette équation, nous faisons l'hypothèse que l'angle φ est proche de 0. Sous cette hypothèse, nous avons $\sin(\varphi) \approx \varphi$.

  (i) Utiliser cette approximation puis transformer l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 obtenue en un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec condition initiale.

  (ii) Résoudre ce problème de Cauchy avec Mathematica mais sans utiliser les fonctions pour la résolution d'équations différentielles ou le calcul de l'exponentielle matricielle et sans faire d'Ansatz.

(c) Nous posons $m = 100\,\mathrm{g}$, $l = 20\,\mathrm{cm}$ et cherchons à approximer numériquement la fonction φ pour un temps entre 0 et 3 secondes en travaillant avec Mathematica mais sans faire l'approximation $\sin(\varphi) \approx \varphi$.

  (i) Tracer le graphe de l'approximation obtenue avec la méthode de Euler et 500 pas.

  (ii) Tracer dans un même système d'axes les graphes de l'approximation obtenue avec la fonction appropriée de Mathematica et de celle obtenue avec l'approximation $\sin(\varphi) \approx \varphi$.

***Exercice* 33 (sans/avec Mathematica)**
Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y^2 - x \\ \dot{y} &= -x^2 + y \end{cases}$$

(a) Sans Mathematica, déterminer les points fixes[11] de ce système.

(b) Nous voulons étudier le comportement des solutions de ce système pour une condition initiale $\big(x(t_0); y(t_0)\big) = (x_0; y_0)$ avec $(x_0; y_0)$ à proximité d'un point fixe. Comme ce système est non-linéaire et donc difficilement résoluble nous allons le linéariser et étudier le système ainsi obtenu.

Pour chaque point fixe $(a; b)$...

(i) ...déterminer sans Mathematica le développement de Taylor de degré 1 en $(a; b)$ des membres de droite du système d'équations différentielles afin d'obtenir un système linéaire à coefficients constants.

(ii) ...déterminer avec Mathematica la solution générale du système linéarisé.

(iii) ...en utilisant les résultats du point précédent, décrire qualitativement le comportement de la solution du système linéarisé pour une condition initiale $\big(x(t_0); y(t_0)\big) = (x_0; y_0)$ avec $(x_0; y_0)$ proche de (a, b).

(c) Afin de valider les résultats obtenus par linéarisation du système, représenter dans un même graphique :

- le champ vectoriel associé à l'équation différentielle initiale,
- les points fixes,
- les solutions numériques sur l'intervalle $[0; 4]$ du système d'équations différentielle initiale pour chacunes des conditions initiales suivantes :

$$\big(x(0); y(0)\big) = (-0.7; 0.7),\ (0.2; 0) \text{ et } (0; 0.1).$$

- les points correspondant aux conditions initiales.

11. Un point X_0 est un point fixe d'un système d'équations différentielles si la fonction constante $X(t) = X_0$ est une solution de ce système.

5 Réponses des exercices

1 (a) `XWNAMO`

(b) `hill`

3 (a) $M^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 21 & 21 \\ 19 & 2 \end{pmatrix} \pmod{26}$.

(b) $M^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 19 & 16 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} \pmod{26}$

(c) M^{-1} modulo 26 n'existe pas.

4 `iggy`

6 (b) `BNNCUHKZS`

(c) $? \equiv 8 \pmod{26}$

7 11 heures

8 `lebonlabrute`

9 (b) $(13; 69; 107; 201; 117; 50; 69; 245; 235; 83; 37; 218; 14; 108; 1; 66; 243; 231; 63; 182; 178; 131; 127; 205; 232; 97; 228; 142; 223; 39)$

10 (a) $\begin{pmatrix} 5 & 162 & 126 \\ 210 & 67 & 33 \\ 92 & 278 & 103 \end{pmatrix}$

11 (a) $M = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

(b) $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2,\ V_1 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\ V_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $\mathrm{Det}(M) = -6 = \lambda_1\lambda_2$

(d) $f(w) = \lambda_i \|w\|^2$ pour tout vecteur w colinéaire à V_i, $i = 1, 2$.

(e) A discuter en classe.

18 Point de selle en $(0; 0; 0)$, minimum local non global en $(2; 0, 0)$.

19 Point de selle en $(0; 0; 0)$, minima globaux en $\left(\frac{1}{2^{7/8}} - 2^{1/8}, \frac{1}{2^{5/8}}, -\frac{1}{2^{7/8}}\right)$ et en $\left(2^{1/8} - \frac{1}{2^{7/8}}, -\frac{1}{2^{5/8}}, \frac{1}{2^{7/8}}\right)$.

20 $\theta(t) = 43.3946 + 54.3968 \cdot 0.881272^t$

21 (a) Voir point (e)(ii).

(b) La population de prédateurs et de proie augmente toutes deux. Bien que la population de prédateurs augmente, celle-ci n'est pas suffisamment importante pour que la population de proies diminue.

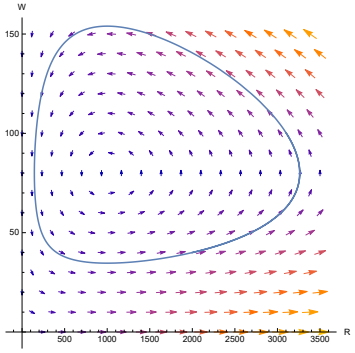
(c) Aucune proie et aucun prédateur, ou, 1000 proies et 80 prédateurs.

(d) (i) 2834 proies (2833.57) et 52 prédateurs (51.8186).

(ii) 2823 proies (2823.19) et 53 prédateurs (52.9364).

(e) (i) 2821 proies (2821.38) et 53 prédateurs (53.0649).

(ii)



22 (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

23 (a) $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \exp(A+B) = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\exp(A+B) \neq \exp(A) \cdot \exp(B)$

24 (a) $\exp(0_n) = I_n$

(b) $\exp(A) = I_n + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} A^k$.

(c) $\exp(B) = (x_{ij})$ avec $x_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $x_{ii} = \exp(a_{ii}) = e^{a_{ii}}$

(d) $\exp(C) = P \cdot \exp(\hat{C}) \cdot P^{-1}$

26 (a) $\begin{pmatrix} e^3 & e^3 - e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$

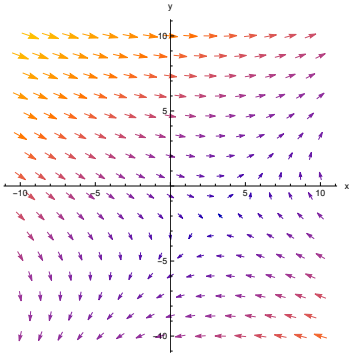
(b) $\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{3t} - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

27 (a) $\begin{pmatrix} -2+3e^2 & -6+6e^2 \\ 1-e^2 & 3-2e^2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} e\cos(2) & -e\sin(2) \\ e\sin(2) & e\cos(2) \end{pmatrix}$

28 (a)



En fonction de la condition initiale, la courbe solution.

- un point P dans le cadran IV.
- est une demi-droite de pente négative dont l'extrémité est le point point P.
- est une demi-droite de pente positive dont l'extrémité est le point point P.
- une courbe avec une asymptote de pente négative et une asymptote de pente positive.

(b) (i) $x(t) = 3 - 3e^t,\ y(t) = -2 - 3e^t,\ t \in \mathbb{R}$

(ii) Demi-droite $y = x - 5,\ x \in]-\infty, 3[$

(c) (i) $x(t) = 3 - \frac{22e^{-2t}}{3} - \frac{2e^t}{3},\ y(t) = -2 + \frac{11e^{-2t}}{3} - \frac{2e^t}{3},\ t \in \mathbb{R}$

(ii) La solution s'approche de la droite d'équation $y = x - 5$ (dans la quadrant III).

29 (a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\left(\frac{2e^{-2t}}{5} + \frac{3e^t}{5}\right) + c_2\left(\frac{6e^{-2t}}{5} - \frac{6e^t}{5}\right) \\ c_1\left(\frac{e^{-2t}}{5} - \frac{e^t}{5}\right) + c_2\left(\frac{3e^{-2t}}{5} + \frac{2e^t}{5}\right) \end{pmatrix}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \hat{c}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \hat{c}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$ avec $\hat{c}_1, \hat{c}_2 \in \mathbb{R}$

(c) A discuter en classe.

30 $x(t) = 2e^{-3t} - e^{2t} - 2$

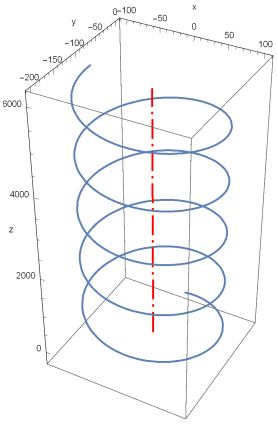
31 (a) $\begin{cases} \dot{v}_x &= \omega v_y \\ \dot{v}_y &= -\omega v_x \\ \dot{v}_z &= 0 \end{cases}$ avec $\omega = \frac{qB}{m}$

(b) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \\ -c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \\ c_3 \end{pmatrix}$ avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

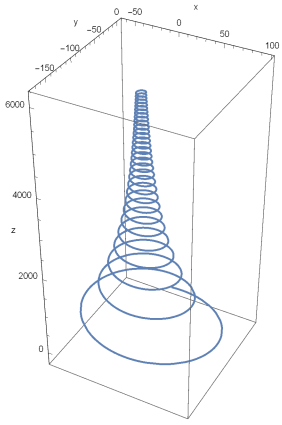
(c) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 100 \cos(-1000t + \frac{\pi}{2}) \\ -100 + 100 \sin(-1000t + \frac{\pi}{2}) \\ 200\,000\ t \end{pmatrix}$.

Trajectoire hélicoïdale dont l'axe vertical a pour équations $x = 0\,\mathrm{m}$ et $y = -100\,\mathrm{m}$, de $100\,\mathrm{m}$ de rayon avec une rotation horaire

(d)



(e)

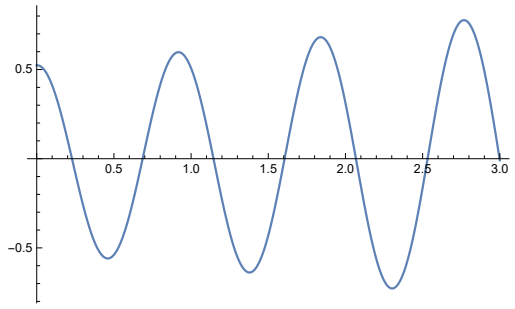


32 (a) $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi)$ avec $\dot{\varphi}(0) = 0,\ \varphi(0) = \frac{\pi}{6}$

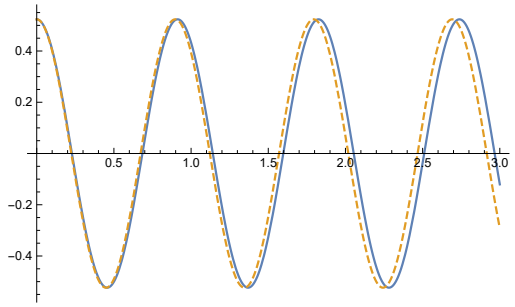
(b) (i) $\dot{X} = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix},\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$

(ii) $\varphi(t) = \frac{\pi}{3} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\ t\right)$

(c) (i)



(ii)

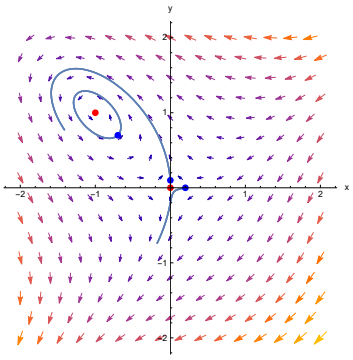


(graphe de la solution obtenue avec l'approximation des petits angles en trait discontinu)

33 (a) $(-1;1)$ et $(0;0)$

(b)
- Pour $(-1;1)$:
  - (i) $\begin{cases} \dot{x} &= 1 - x - 2y \\ \dot{y} &= 1 + 2x + y \end{cases}$
  - (ii) $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + c_1 \left(\begin{smallmatrix} \cos(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t)/\sqrt{3} \\ 2\sin(\sqrt{3}t/\sqrt{3} \end{smallmatrix}\right) + c_2 \left(\begin{smallmatrix} -2\sin(\sqrt{3}t) \\ \cos(\sqrt{3}t) + \sin(\sqrt{3}t)/\sqrt{3} \end{smallmatrix}\right), \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
  - (iii) Point fixe stable
- Pour $(0;0)$:
  - (i) $\begin{cases} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y \end{cases}$
  - (ii) $c_1 \left(\begin{smallmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_2 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ e^{t} \end{smallmatrix}\right), \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
  - (iii) Point fixe instable

(c)



Corrigés d'une sélection d'exercices

***Corrigé de l'exercice* 1**

(a) Le codage du texte donne

$$P = (14; 17; 0; 13; 6; 4).$$

Nous calculons le texte chiffré codé puis le décodons :

- $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127 \\ 48 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 23 \\ 22 \end{pmatrix} \pmod{26}$
  Les premières lettres du texte chiffré sont `XW`.
- $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 26 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{26}$
  La suite du texte chiffré est `NA`.
- $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 14 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix} \pmod{26}$
  Le dernière lettres du texte chiffré sont `MO`.

Plutôt que de multiplier un à un les vecteurs correspondant aux bigrammes nous pouvons les grouper dans une matrice dont ils constituent les colonnes :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 0 & 6 \\ 17 & 13 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127 & 65 & 38 \\ 48 & 26 & 14 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 23 & 13 & 12 \\ 22 & 0 & 14 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

Le texte chiffré codé et décodé sont donc

$$C = (23; 22; 13; 0; 12; 14) \quad \texttt{XWNAMO}$$

(b) Le codage du cryptogramme nous donne

$$C = (9; 23; 10, 7).$$

Il nous faut maintenant calculer l'inverse de M Comme

$$\mathrm{Det}(M) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

la formule d'inversion d'une matrice 2×2 nous donne

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nous déchiffrons maintenant C :

- $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -97 \\ 60 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \pmod{26}$
  Les premières lettres du texte clair sont `hi`.
- $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} \pmod{26}$
  Les dernières lettres du texte clair sont `ll`.

Remarquons que plutôt que de multiplier un à un les vecteurs correspondant aux bigrammes nous pouvons les grouper dans une matrice dont ils constituent les colonnes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 23 & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

Le cryptogramme déchiffré codé et décodé sont donc

$$P = (7; 8; 11; 11) \quad \texttt{hill}.$$

***Corrigé de l'exercice* 2**

Afin d'avoir un code qui fonctionne quelle que soit sa longueur, nous commençons par ajouter un caractère dans le cas où celle-ci ne était pas paire :

In[1]:=
```
Clear["Global`*"]
m = {{2, 3}, {1, 5}};
n = 26;
p = "collegedusud";
If[OddQ[StringLength[p]], p = StringJoin[{p, "z"}],p]
```

Out[1]=
```
collegedusud
```

Nous codons ensuite le texte clair :

In[2]:=
```
pCode = ToCharacterCode[p] - ToCharacterCode["a"][[1]]
```

Out[2]=
```
{2, 14, 11, 11, 4, 6, 4, 3, 20, 18, 20, 3}
```

Pour construire la matrice à multiplier par la matrice de chiffrement, le plus simple est d'utiliser la fonction `Partition[list,n]` qui est proposée dans Mathematica 12. Celle-ci permet de partitionner `list` em plusieurs listes de longueurs `n` :

In[3]:=
```
Partition[{1, 2, 3, 4, 5}, 2]
```

Out[3]=
```
{{1, 2}, {3, 4}}
```

Nous constatons que Mathematica ne retourne que des liste qui ont exactement la longueur imposée. Le dernier élément à été donc perdu. Appliquons ceci pour construire la matrice à multiplier par la matrice de chiffrement :

In[4]:=
```
pCodeMatrice = Transpose[Partition[pCode, 2]];
% // MatrixForm
```

Out[4]=
$$\begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 4 & 20 & 20 \\ 14 & 11 & 6 & 3 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$

Voici la variante avec la version avec `Table` :

In[5]:=
```
Transpose[
  Table[
    {pCode[[2 i - 1]], pCode[[2 i]]},
    {i, 1, Length[pCode]/2}
  ]
];
% // MatrixForm
```

Out[5]= $\begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 4 & 20 & 20 \\ 14 & 11 & 6 & 3 & 18 & 3 \end{pmatrix}$

La multiplication modulo `n` de `m` et de cette dernière matrice donne une matrice dont les colonnes correspondent aux groupes de code chiffrés :

In[6]:=
```
cCodeMatrice = Mod[m.pCodeMatrice, n];
% // MatrixForm
```

Out[6]= $\begin{pmatrix} 20 & 3 & 0 & 17 & 16 & 23 \\ 20 & 14 & 8 & 19 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Nous mettons cette matrice sous forme de liste de codes :

In[7]:=
```
cCode = Transpose[cCodeMatrice] // Flatten
```

Out[7]= {20, 20, 3, 14, 0, 8, 17, 19, 16, 6, 23, 9}

Il reste à décoder cette liste :

In[8]:=
```
FromCharacterCode[cCode + ToCharacterCode["A"][[1]]]
```

Out[8]= UUDOAIRTQGXJ

Corrigé de l'exercice 3

(a) Comme $\mathrm{Det}(M) = 15$, il faut trouver l'inverse de 15 modulo 26, c'est-à-dire $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$15x \equiv 1 \pmod{26}.$$

Nous le faisons avec l'algorithme de Euclide étendu :

	$\cdot 26$	$\cdot 15$	calculs pour la ligne suivante
26	1	0	
15	0	1	$\frac{26}{15} = 1 + \frac{11}{26}$
$26 \bmod 15 = 11$	1	-1	$\frac{15}{11} = 1 + \frac{4}{11}$
$15 \bmod 11 = 4$	-1	2	$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$
$11 \bmod 4 = 3$	3	-5	$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$
$4 \bmod 3 = 1$	-4	7	

Nous avons donc

$$(-4)\cdot 26 + 7\cdot 15 = 1 \text{ donc } 7\cdot 15 \equiv 1 \pmod{26}.$$

Cela signifie que 7 est l'inverse modulo 26 de 15 :

$$15^{-1} \equiv 7 \pmod{26}.$$

L'inverse de M modulo 26 est donc

$$M^{-1} \equiv 15^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix} \equiv 7\cdot\begin{pmatrix}3 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}21 & 21\\ -7 & 28\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}21 & 21\\ 19 & 2\end{pmatrix} \pmod{26}.$$

(b) Nous avons $\mathrm{Det}(M) = -15$. A l'aide de l'algorithme de Euclide nous trouvons $(-15)^{-1} \equiv 19 \pmod{26}$ (pour pouvoir utiliser l'algorithme de Euclide étendu il faut avoir deux nombres positifs, il a donc fallu chercher l'inverse $11 \equiv -15 \pmod{26}$). Nous avons alors

$$M^{-1} \equiv 11^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -6\\ -4 & 9\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}19 & 16\\ 2 & 15\end{pmatrix} \pmod{26}.$$

(c) Nous avons $\mathrm{Det}(M) = 39$. Comme 39 n'est pas relativement premier avec 26, 39, et par conséquent aussi M, ne possèdent pas d'inverse modulo 26.

***Corrigé de l'exercice* 4**

Nous commençons par coder le cryptogramme :

$$C = (2; 14; 8; 4).$$

Pour le déchiffrer, il faut calculer l'inverse modulo 26 de M. Nous avons $\mathrm{Det}(M) = 61$. Afin de simplifier les calculs de l'inverser du déterminant de $\mathrm{Det}(M)$ nous le réduisons modulo 26 : $61 \equiv 9 \pmod{26}$. Comme $3\cdot 9 = 27 \equiv 1 \pmod{26}$, nous avons $9^{-1} \equiv 3 \pmod{26}$ (nous pouvons aussi trouver ce résultat via l'algorithme de Euclide étendu). Nous avons alors

$$M^{-1} \equiv 3\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 11\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}15 & -9\\ 6 & 7\end{pmatrix} \pmod{26}$$

Nous multiplions ensuite M^{-1} par les bigrammes cryptés codés :

$$M^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 14\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}8\\ 6\end{pmatrix} \pmod{26}, \quad M^{-1}\cdot\begin{pmatrix}8\\ 4\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}6\\ 24\end{pmatrix} \pmod{26}.$$

Le texte clair codé est donc $P = (8; 6; 6, 24)$ ce qui correspond à

`iggy`

***Corrigé de l'exercice* 5**

Nous commençons par coder le cryptogramme :

In[9]:=
```
Clear["Global`*"]
m = {{2, 3}, {1, 5}};
n = 26;
c = "UUDOAIRTQGXJ";
cCode = ToCharacterCode[c] - ToCharacterCode["A"][[1]]
```

Out[9]=
```
{20, 20, 3, 14, 0, 8, 17, 19, 16, 6, 23, 9}
```

Nous construisons ensuite une matrice dont les colonnes correspondent aux bigrammes :

In[10]:=
```
cCodeMatrice = Transpose[Partition[cCode, 2]];
% // MatrixForm
```

Out[10]= $\begin{pmatrix} 20 & 3 & 0 & 17 & 16 & 23 \\ 20 & 14 & 8 & 19 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Variante avec `Table`

In[11]:=
```
Transpose[
  Table[
    {cCode[[2 i - 1]], cCode[[2 i]]},
    {i, 1, Length[cCode]/2}
  ]
];
% // MatrixForm
```

Out[11]= $\begin{pmatrix} 20 & 3 & 0 & 17 & 16 & 23 \\ 20 & 14 & 8 & 19 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Nous calculons maintenant l'inversion de M modulo 26 :

In[12]:=
```
mInv = Inverse[m, Modulus -> 26];
% // MatrixForm
```

Out[12]= $\begin{pmatrix} 23 & 7 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$

La multiplication modulo `n` de `mInv` et `cCodeMatrice` donne une matrice dont les colonnes correspondent aux bigrammes du texte clair codé :

In[13]:=
```
pCodeMatrice = Mod[mInv.cCodeMatrice, n];
% // MatrixForm
```

Out[13]= $\begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 4 & 20 & 20 \\ 14 & 11 & 6 & 3 & 18 & 3 \end{pmatrix}$

Nous mettons cette matrice sous forme de liste de codes :

In[14]:=
```
pCode = Transpose[pCodeMatrice] // Flatten
```

Out[14]=
```
{2, 14, 11, 11, 4, 6, 4, 3, 20, 18, 20, 3}
```

Il reste à décoder cette liste :

```
In[15]:= FromCharacterCode[pCode + ToCharacterCode["a"][[1]]]

Out[15]= collegedusud
```

***Corrigé de l'exercice* 6**

(a) Il faut montrer que M est inversible modulo 26, ce qui est garanti si 26 et $\mathrm{Det}(M) = 441$ sont relativement premier. L'algorithme de Euclide nous donne les égalités suivantes :

$$\mathrm{pgdc}(441; 26) = \mathrm{pgdc}\big(26; 441 \bmod 26\big) = \mathrm{pgdc}(26; 25) = 1.$$

(b) Alice doit dans un premier temps coder le message. Elle obtient

$$(21; 8; 21; 4; 11; 0; 21; 8; 4).$$

Dans un deuxième temps, elle doit multiplier la matrice de chiffrement à chaque matrice colonne constituée des trigrammes codés :

$$M \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 339 \\ 611 \\ 871 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} \pmod{26}$$
$$M \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 288 \\ 228 \\ 267 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} \pmod{26}$$
$$M \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 322 \\ 441 \\ 616 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 18 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

Finalement, le message codé crypté intercepté par Eve correspond à

$$(1; 13; 13; 2; 20; 7; 10; 25; 18) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \texttt{BNNCUHKZS}.$$

(c) Notons x l'élément manquant. Le produit modulo 26 de M avec la matrice de déchiffrement doit donner la matrice identité, en particulier, la multiplication de la troisième ligne de M par le seconde colonne de la matrice de déchiffrage doit être congru à 0 (nous choisissons cette multiplication car le coefficient de x est alors un nombre inversible modulo 26) :

$$20 \cdot 5 + 17 \cdot x + 15 \cdot 12 \equiv 0 \pmod{26}.$$

Il s'en suit que $17x \equiv 0 - 20 \cdot 5 - 15 \cdot 12 \equiv 6 \pmod{26}$ et donc $x \equiv 17^{-1} \cdot 6 \pmod{26}$. L'algorithme de Euclide nous donnant $17^{-1} \equiv 23 \pmod{26}$ nous avons

$$x \equiv 23 \cdot 6 \equiv 8 \pmod{26}.$$

Une autre méthode aurait été de travailler avec la règle de Cramer (il aurait alors fallut calculer l'inverse modulo 26 de $\mathrm{Det}(M)$).

Corrigé de l'exercice 7

Après t minutes d'attente, $t \in \mathbb{N}$, la grande aiguille a fait une rotation de $\frac{360°}{60} \cdot t = 6° \cdot t$ tandis que celle des heures a fait une rotation $\frac{360°/12}{60} \cdot t = 0.5° \cdot t$. Nous cherchons un temps t tel que

$$\frac{360°}{12} + 0.5°t = 6°t + k \cdot 360°$$

pour un nombre $k \in \mathbb{Z}$. Nous devons donc avoir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 30 + 0.5t &= 6t + 360k \\ 60 + t &= 12t + 720k \\ 60 &= 11t + 720k \end{aligned}$$

Il s'en suit que $11t \equiv 60 \pmod{720}$ et

$$t \equiv 11^{-1} \cdot 60 \pmod{720}.$$

Calculons 11^{-1} à l'aide de l'algorithme de Euclide étendu :

	$\cdot 720$	$\cdot 11$	calculs pour la ligne suivante
720	1	0	
11	0	1	$\frac{720}{11} = 65 + \frac{5}{11}$
$720 \bmod 11 = 5$	1	-65	$\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}$
$11 \bmod 5 = 1$	-2	131	

Nous avons donc $-2 \cdot 720 + 131 \cdot 11 = 1$ ce qui signifie que $131 \cdot 11 \equiv 1 \pmod{720}$ et que $11^{-1} \equiv 131 \pmod{720}$. Il s'en suit que nous avons les congruences suivantes :

$$\begin{aligned} t &\equiv 131 \cdot 60 && \pmod{720} \\ &\equiv 7860 && \pmod{720} \\ &\equiv 660 && \pmod{720} \end{aligned}$$

Il faut donc attendre 660 minutes = 11 heures pour que les aiguilles des heures et des minutes se superposent. Il sera donc midi ou minuit. La prochaines superposition se fera 720 minutes = 12 heures plus tard. Il n'y a pas donc pas d'autre moment de la journée qu'à midi et minuit où ces aiguilles se superposent.

Corrigé de l'exercice 8

Nous commençons par coder le cryptogramme :

In[16]:=
```
Clear["Global`*"]
m = {
  {1, 3, 1, 1},
  {2, 5, 2, 2},
  {1, 3, 8, 9},
  {1, 3, 2, 2}
};
n = 26;
k=Length[m];
c = "MUBBVFDWWYFT";
cCode = ToCharacterCode[c] - ToCharacterCode["A"][[1]]
```

Out[16]=
```
{12, 20, 1, 1, 21, 5, 3, 22, 22, 24, 5, 19}
```

Nous construisons ensuite une matrice dont les colonnes correspondent aux paquets de 4 codes :

In[17]:=
```
cCodeMatrice = Transpose[Partition[cCode, k]];
% // MatrixForm
```

Out[17]=
$$\begin{pmatrix} 12 & 21 & 22 \\ 20 & 5 & 24 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 22 & 19 \end{pmatrix}$$

Version avec `Table` :

In[18]:=
```
cCodeMatrice = Transpose[
  Table[
   cCode[[k i + j]],
   {i, 0, Length[cCode]/k - 1},
   {j, 1, k}
  ]
];
% // MatrixForm
```

Out[18]=
$$\begin{pmatrix} 12 & 21 & 22 \\ 20 & 5 & 24 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 22 & 19 \end{pmatrix}$$

Nous calculons maintenant l'inversion de M modulo 26 :

In[19]:=
```
mInv = Inverse[m, Modulus -> 26];
% // MatrixForm
```

Out[19]= $\begin{pmatrix} 22 & 3 & 0 & 25 \\ 2 & 25 & 0 & 0 \\ 19 & 0 & 25 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & 19 \end{pmatrix}$

La multiplication modulo `n` de `mInv` et `cCodeMatrice` donne une matrice dont les colonnes correspondent aux bigrammes du texte clair codé :

In[20]:=
```
pCodeMatrice = Mod[mInv.cCodeMatrice, n];
% // MatrixForm
```

Out[20]= $\begin{pmatrix} 11 & 13 & 17 \\ 4 & 11 & 20 \\ 1 & 0 & 19 \\ 14 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Nous mettons cette matrice sous forme de liste de codes :

In[21]:=
```
pCode = Transpose[pCodeMatrice] // Flatten
```

Out[21]=
```
{11, 4, 1, 14, 13, 11, 0, 1, 17, 20, 19, 4}
```

Il reste à décoder cette liste :

In[22]:=
```
FromCharacterCode[pCode + ToCharacterCode["a"][[1]]]
```

Out[22]=
```
lebonlabrute
```

***Corrigé de l'exercice* 9**

(a) Il faut vérifier que $\mathrm{Det}(M)$ et 256 sont relativement premier. c'est-à-dire que leur plus grand diviseur commun vaut 1 :

In[23]:=
```
Clear["Global`*"]
m = {
  {1, 3, 4},
  {5, 2, 0},
  {3, 4, 7}
};
n = 256;
GCD[Det[m], n]
```

Out[23]= 1

(b) Nous commençons par coder le texte clair :

In[24]:=
```
p = "Il␣était␣une␣fois␣dans␣l'Ouest";
StringLength[p]
pCode = ToCharacterCode[p]
```

Out[24]= 30

Out[25]=
```
{73, 108, 32, 233, 116, 97, 105, 116, 32, 117, 110,
   101, 32, 102, 111, 105, 115, 32, 100, 97, 110, 115,
   32, 108, 39, 79, 117, 101, 115, 116}
```

Comme la longueur du texte est un multiple de 3, il n'est pas nécessaire d'ajouter des caractères. Nous construisons ensuite la matrice dont les colonnes correspondent aux trigrammes :

In[26]:=
```
pCodeMatrice =pCodeMatrice = Transpose[Partition[
   pCode, 3]];
% // MatrixForm
```

Out[26]=
$$\begin{pmatrix} 73 & 233 & 105 & 117 & 32 & 105 & 100 & 115 & 39 & 101 \\ 108 & 116 & 116 & 110 & 102 & 115 & 97 & 32 & 79 & 115 \\ 32 & 97 & 32 & 101 & 111 & 32 & 110 & 108 & 117 & 116 \end{pmatrix}$$

Version avec `Table` :

In[27]:=
```
pCodeMatrice = Transpose[
  Table[
    {pCode[[3 i + 1]], pCode[[3 i + 2]], pCode[[3 i
       + 3]]},
    {i, 0, Length[pCode]/3 - 1}
  ]
];
% // MatrixForm
```

Out[27]=
$$\begin{pmatrix} 73 & 233 & 105 & 117 & 32 & 105 & 100 & 115 & 39 & 101 \\ 108 & 116 & 116 & 110 & 102 & 115 & 97 & 32 & 79 & 115 \\ 32 & 97 & 32 & 101 & 111 & 32 & 110 & 108 & 117 & 116 \end{pmatrix}$$

La multiplication modulo `n` de `m` et de cette dernière matrice donne une matrice dont les colonnes correspondent aux groupes de code chiffrés :

In[28]:=
```
cCodeMatrice = Mod[m.pCodeMatrice, n];
% // MatrixForm
```

Out[28]=
$$\begin{pmatrix} 13 & 201 & 69 & 83 & 14 & 66 & 63 & 131 & 232 & 142 \\ 69 & 117 & 245 & 37 & 108 & 243 & 182 & 127 & 97 & 223 \\ 107 & 50 & 235 & 218 & 1 & 231 & 178 & 205 & 228 & 39 \end{pmatrix}$$

Nous mettons cette matrice sous forme de liste de codes :

In[29]:=
```
cCode = Transpose[cCodeMatrice] // Flatten
```

Out[29]=
```
{13, 69, 107, 201, 117, 50, 69, 245, 235, 83, 37, 218,
   14, 108, 1, 66, 243, 231, 63, 182, 178, 131, 127,
   205, 232, 97, 228, 142, 223, 39}
```

(c) Nous commençons par tester la matrice de chiffrement (aucun changement par rap-

port au code précédent)

In[30]:=
```
Clear["Global`*"]
m = {
  {1, 3, 4},
  {5, 2, 0},
  {3, 4, 7}
};
n = 256;
If[GCD[Det[m], n] > 1, Print["Attention, matrice mal
   choisie!"],
Print["Matrice ok!"]]
```

Out[30]=
```
Matrice ok!
```

Nous définissons la variable `k` correspondant à l'ordre de la matrice :

In[31]:=
```
k = Length[m]
```

Out[31]=
```
3
```

Nous définissons maintenant la variable contenant le message à chiffrer. Si la longueur du message n'est pas un multiple de k nous allons devoir redéfinir la message en lui ajoutant des espaces. Nous commençons par définir une variable `test` testant s'il y a des espace à ajouter, c'est-à-dire si la longueur du message est un multiple de k (pour vérifier le fonctionnement de cela, nous ajoutons un caractère au message à chiffrer)

In[32]:=
```
p = "Il était une fois dans l'Ouest.";
test = Mod[StringLength[p], k]
```

Out[32]=
```
1
```

La longueur du message n'est pas un multiple k : il y a un caractère de trop (le point qui a été ajouté). Il faut donc ajouter $k-1$ espaces. Faisons-le puis codons le message :

In[33]:=
```
If[
  test != 0,
  For[
    i = 0,
    i < k - test,
    i++,
    p = StringJoin[{p, " "}]
  ]
]
pCode = ToCharacterCode[p]
```

Out[33]=
```
{73, 108, 32, 233, 116, 97, 105, 116, 32, 117, 110,
  101, 32, 102, 111, 105, 115, 32, 100, 97, 110, 115,
  32, 108, 39, 79, 117, 101, 115, 116, 46, 32, 32}
```

Les deux derniers codes 32 correspondent aux espaces ajoutés : l'ajout a fonctionné ! Remarquons que si `test` a la valeur 0, la message n'est pas changé.

Nous construisons ensuite la matrice dont les colonnes correspondent aux trigrammes :

In[34]:=
```
pCodeMatrice = Transpose[Partition[pCode, k]];
% // MatrixForm
```

Out[34]=
$$\begin{pmatrix} 73 & 233 & 105 & 117 & 32 & 105 & 100 & 115 & 39 & 101 & 46 \\ 108 & 116 & 116 & 110 & 102 & 115 & 97 & 32 & 79 & 115 & 32 \\ 32 & 97 & 32 & 101 & 111 & 32 & 110 & 108 & 117 & 116 & 32 \end{pmatrix}$$

Version avec `Table` :

In[35]:=
```
Transpose[
  Table[
    pCode[[k i + j]],
    {i, 0, Length[pCode]/k - 1},
    {j, 1, k}
  ]
];
% // MatrixForm
```

Out[35]=
$$\begin{pmatrix} 73 & 233 & 105 & 117 & 32 & 105 & 100 & 115 & 39 & 101 & 46 \\ 108 & 116 & 116 & 110 & 102 & 115 & 97 & 32 & 79 & 115 & 32 \\ 32 & 97 & 32 & 101 & 111 & 32 & 110 & 108 & 117 & 116 & 32 \end{pmatrix}$$

La multiplication modulo `n` de `m` et de cette dernière matrice donne une matrice dont les colonnes correspondent aux groupes de code chiffrés (depuis ici, plus de changement par rapport à la version précédente) :

In[36]:=
```
cCodeMatrice = Mod[m.pCodeMatrice, n];
% // MatrixForm
```

Out[36]=
$$\begin{pmatrix} 13 & 201 & 69 & 83 & 14 & 66 & 63 & 131 & 232 & 142 & 14 \\ 69 & 117 & 245 & 37 & 108 & 243 & 182 & 127 & 97 & 223 & 38 \\ 107 & 50 & 235 & 218 & 1 & 231 & 178 & 205 & 228 & 39 & 234 \end{pmatrix}$$

Nous mettons cette matrice sous forme de liste de codes :

In[37]:=
```
cCode = Transpose[cCodeMatrice] // Flatten
```

Out[37]=
```
{13, 69, 107, 201, 117, 50, 69, 245, 235, 83, 37, 218,
  14, 108, 1, 66, 243, 231, 63, 182, 178, 131, 127,
  205, 232, 97, 228, 142, 223, 39, 14, 38, 234}
```

***Corrigé de l'exercice* 10**

(a)

In[38]:=
```
Clear["Global`*"]
pConnuASCII = "Le␣monde␣se␣divise";
c = {110, 281, 230, 83, 195, 112, 230, 173, 202, 21,
  283, 78, 206, 235, 272, 275, 222, 135, 46, 243,
  112, 148, 85, 257, 165, 14, 44, 21, 59, 154, 103,
  40, 41, 100, 238, 11, 259, 96, 34, 126, 80, 235,
  165, 14, 44, 83, 264, 127, 266, 9, 48, 240, 65,
  149, 58, 220, 20, 163, 193, 46, 151, 231, 45, 204,
  43, 199, 42, 251, 276, 25, 3, 14, 281, 66, 164,
  253, 96, 255, 252, 121, 45, 119, 223, 282, 223,
  173, 49, 51, 26, 263, 70, 86, 158};
n = 284;
l = StringLength[pConnuASCII] (*longueur du message
  déchiffré*)
```

Out[38]=
```
18
```

Nous commençons par coder la partie connue du message clair et extraire du message chiffré la partie qui lui correspond :

In[39]:=
```
pConnu = ToCharacterCode[pConnuASCII]
cConnu = c[[1 ;; l]]
```

Out[39]=
```
{76, 101, 32, 109, 111, 110, 100, 101, 32, 115, 101,
   32, 100, 105, 118, 105, 115, 101}
```

Out[40]=
```
{110, 281, 230, 83, 195, 112, 230, 173, 202, 21, 283,
   78, 206, 235, 272, 275, 222, 135}
```

Nous extrayons de `cConnu` différents groupes de 3 paquets consécutifs de 3 codes chiffrés jusqu'à obtenir une matrice inversible modulo 284, c'est-à-dire dont le déterminant est relativement premier avec 284. Pour cela, nous évaluons la cellule suivante pour les valeur $m = 1, 2, \ldots$ jusqu'à trouver une valeur de m convenable. Dans notre cas $m = 4$ fait l'affaire :

In[41]:=
```
m = 4;(*numéro du 1er paquet extrait*)
Partition[cConnu,3][[m ;; m + 2]](*extraction des
   paquets m,m+1 et m+2*)
GCD[Det[%], n]
```

Out[41]=
```
{{21, 283, 78}, {206, 235, 272}, {275, 222, 135}}
```

Out[42]=
```
1
```

La version avec `Table` est plus complexe. Nous commençons par calculer le position du premier code chiffré à extraire si nous voulons extraire les paquets m, $m+1$ et $m+2$. Dans ce cas, le premier code chiffré à extraire et le $3(m-1)+1 = (3m-2)$-ème. Par exemple, si nous voulons commencer par extraire le paquet numéro 2 (donc

$m = 2$), le premier code chiffré extrait est le $(3 \cdot 2 - 2)$-ème, c'est-à-dire le quatrième. Nous faisons des essais jusqu'à obtenir un groupe de 3 paquets consécutifs formant une matrice inversible modulo 284, ce qui est le cas si le déterminant de la matrice est relativement premier avec 284.

In[43]:=
```
m = 4; (*numéro du 1er paquet extrait*)
Table[
  cConnu[[(3 m - 2) + 3 i + j]],
  {i, 0, 2}, {j, 0, 2}
] (*extraction des paquets m,m+1 et m+2*)
GCD[Det[%], n]
```

Out[43]=
```
{{21, 283, 78}, {206, 235, 272}, {275, 222, 135}}
```

Out[44]=
```
1
```

Nous avons alors trouvé la matrice $\hat{C}$ du théorème 1.5 :

In[45]:=
```
hatC = Transpose[%%];
MatrixForm[%]
```

Out[45]=
$$\begin{pmatrix} 21 & 206 & 275 \\ 283 & 235 & 222 \\ 78 & 272 & 135 \end{pmatrix}$$

Nous définissons alors la matrice $\hat{P}$ du même théorème :

In[46]:=
```
hatP = Transpose[
  Partition[pConnu, 3][[m ;; m + 2]]
];
MatrixForm[%]
```

Out[46]=
$$\begin{pmatrix} 115 & 100 & 105 \\ 101 & 105 & 115 \\ 32 & 118 & 101 \end{pmatrix}$$

Version avec `Table` :

In[47]:=
```
hatP = Transpose[
  Table[
    pConnu[[(3 m - 2) + 3 i + j]],
   {i, 0, 2}, {j, 0, 2}
  ]
];
MatrixForm[%]
```

Out[47]=
$$\begin{pmatrix} 115 & 100 & 105 \\ 101 & 105 & 115 \\ 32 & 118 & 101 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors construire l'inverse de la matrice de chiffrement :

In[48]:=
```
mInv = Mod[hatP.Inverse[hatC, Modulus -> n], n];
MatrixForm[%]
```

Out[48]= $\begin{pmatrix} 5 & 162 & 126 \\ 210 & 67 & 33 \\ 92 & 278 & 103 \end{pmatrix}$

(b) Nous mettons sous forme matricielle le message chiffré, chaque colonne correspondant à un paquet :

In[49]:=
```
cCodeMatrice = Transpose[Partition[c, 3]];
MatrixForm[%]
```

Out[49]= $\begin{pmatrix} 110 & 83 & 230 & 21 & 206 & 275 & 46 & \dots & 70 \\ 281 & 195 & 173 & 283 & 235 & 222 & 243 & \dots & 86 \\ 230 & 112 & 202 & 78 & 272 & 135 & 112 & \dots & 158 \end{pmatrix}$

Version avec `Table`

In[50]:=
```
cCodeMatrice = Transpose[
  Table[
    c[[3 i + j]],
    {i, 0, Length[c]/3 - 1}, {j, 1, 3}
  ]
];
MatrixForm[%]
```

Out[50]= $\begin{pmatrix} 110 & 83 & 230 & 21 & 206 & 275 & 46 & \dots & 70 \\ 281 & 195 & 173 & 283 & 235 & 222 & 243 & \dots & 86 \\ 230 & 112 & 202 & 78 & 272 & 135 & 112 & \dots & 158 \end{pmatrix}$

Nous pouvons alors déchiffrer le message :

In[51]:=
```
FromCharacterCode[
  Transpose[Mod[mInv.cCodeMatrice, n]] // Flatten
]
```

Out[51]= Le monde se divise en deux catégories : ceux qui ont un pistolet chargé et ceux qui creusent.

***Corrigé de l'exercice* 11**

(a) Comme M est carré d'ordre 2 et symétrique par rapport à sa diagonale descendante, nous posons $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ et nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ax + by \\ by + cy \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x(ax + by) + y(bx + cy) \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \end{aligned}$$

Comme la dernière expression doit être égale à $f(x,y)$, nous devons choisir $a = -2,\ b = 2$ et $c = 1$. Nous avons donc

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation $\mathrm{Det}(M - \lambda I_2) = 0$, où I_2 est la matrice identité 2×2. Nous avons donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\,(M - \lambda I_2) &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(1-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda+3)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Nous avons donc deux valeurs propres

$$\lambda_1 = -3 \text{ et } \lambda_2 = 2.$$

Un générateur de l'espace propre correspondant à une valeur propre λ est un vecteur V non nul de composantes $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ dans $\mathcal{B}$ tels que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (M - \lambda I_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_1 = -3$, les composantes d'un vecteur propre $V_1 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ doivent satisfaire les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= (M - \lambda_1 I_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2-(-3) & 2 \\ 2 & 1-(-3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc choisir

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme générateur de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -3$.

Pour $\lambda_1 = 2$, les composantes d'un vecteur propre de $V_2 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ doivent satisfaire les

équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &= (M-\lambda_1 I_2)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-2-2 & 2\\ 2 & 1-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-4x+2y\\ 2x-y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc choisir

$$V_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

comme générateur de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$.
Finalement, nous constatons que

$$V_1 \cdot V_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 0,$$

ce qui signifie que les espaces propres sont orthogonaux.

(c) (i) $\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = -2\cdot 2 - 2\cdot 1 = -6$

(ii) Nous constatons que le déterminant de M est le produit des valeurs propres de M.

(iii) Notons m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à la matrice M, $\mathcal{B}' = (V_1, V_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ constituée des vecteurs propres trouvés au point précédent et P la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. La matrice associée à m relativement à $\mathcal{B}'$ est la matrice diagonale $M' = \left(\begin{smallmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right)$ et nous avons

$$M = P\cdot M'\cdot P^{-1}.$$

Comme le déterminant d'un produit de matrices carrées est égal au produit des déterminants et comme le déterminant de l'inverse d'une matrice carrée est égal à l'inverse du déterminant, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(M) &= \mathrm{Det}(P\cdot M'\cdot P^{-1})\\
&= \mathrm{Det}(P)\cdot\mathrm{Det}(M')\cdot\mathrm{Det}(P^{-1})\\
&= \mathrm{Det}(P)\cdot\mathrm{Det}(M')\cdot\frac{1}{\mathrm{Det}(P)}\\
&= \mathrm{Det}(M')\\
&= -3\cdot 2
\end{aligned}$$

(d) Soit $W \in \mathbb{R}^2$. Si B à un vecteur colinéaire à un vecteur propre de M alors W est aussi un vecteur propre de M. Notons λ la valeur propre associée à W. Nous avons alors les égalités suivantes :

$$f(W) = \langle W, MW\rangle = \langle W, \lambda W\rangle = \lambda\langle W, W\rangle = \lambda\|W\|^2.$$

Il s'en suit que

$$f(W) = \begin{cases} -3\|W\|^2 & \text{si } W \mathbin{/\!/} V_1 \\ 2\|W\|^2 & \text{si } W \mathbin{/\!/} V_2 \end{cases}$$

(e) A discuter en classe.

***Corrigé de l'exercice* 12**

(a) **Hypothèse** m est un endomorphisme symétrique

A montrer ${}^tM = M$

Preuve Posons $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nous avons d'une part

$$\langle m(v), w\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = c$$

et d'autre part

$$\langle v, m(w)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & c \end{pmatrix} \right\rangle = b.$$

Comme m est un endomorphisme symétrique, il s'en suit que $c = b$ et donc ${}^tM = M$.

(b) **Hypothèse** ${}^tM = M$

A montrer m est un endomorphisme symétrique

Preuve Pour tout vecteur $v, w \in E$ de matrice colonne V, W, nous avons

$$\langle m(v), w\rangle = {}^t(M \cdot V) \cdot w = ({}^tV \cdot {}^tM) \cdot w = ({}^tV \cdot M) \cdot w = {}^tV \cdot (M \cdot w) = \langle v, m(w)\rangle$$

ce qui signifie que m est un endomorphisme symétrique.

***Corrigé de l'exercice* 13**

Hypothèse $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ la matrice d'un endomorphisme symétrique de E

A montrer L'ensembles des valeurs propres de M est non vide et est égal à

$$\left\{ \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \right\}.$$

Preuve Si λ est une valeur propre de M alors $\mathrm{Det}(M - \lambda I) = 0$, où I est la matrice 2×2 identité. Nous avons alors l'équation suivante :

$$\lambda^2 - \lambda(a+c) + ac - b^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2$ et n'est donc jamais négatif : l'ensemble des valeurs propres est donc non vide. Il s'en suit que M possède une ou deux les valeurs propres qui sont toutes réelles et valent $\frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$.

***Corrigé de l'exercice* 14**

A discuter en classe...

***Corrigé de l'exercice* 15**

Hypothèse M la matrice d'un endomorphisme symétrique de E.

A montrer $\mathrm{Det}(M) = \lambda_1\lambda_2$, où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres correspondant à chacun des espaces propres de M.

Preuve Notons m l'endomorphisme de E dont M est matrice. Comme m est un endomorphisme symétrique, par le théorème spectral, l'espace vectoriel E possède une base $\mathcal{B}' = (e'_1; e'_2)$ formée de vecteurs propres de m. Notons λ_1, λ_2 les valeurs propres correspondant à e'_1, e'_2 et P la matrice de passage $\mathcal{B}'$ à la base initiale. La matrice de m dans $\mathcal{B}'$ est $M' = \left(\begin{smallmatrix} \lambda 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$ et $M = PM'P^{-1}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(M) &= \mathrm{Det}(PM'P^{-1}) \\
&= \mathrm{Det}(P)\,\mathrm{Det}(M')\,\mathrm{Det}(P^{-1}) \\
&= \mathrm{Det}(P)\,\mathrm{Det}(M')\frac{1}{\mathrm{Det}(P)} \\
&= \mathrm{Det}(M') \\
&= \lambda_1\lambda_2
\end{aligned}$$

***Corrigé de l'exercice* 16**

Hypothèse v un vecteur de E avec $v = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2$ et $(e'_1; e'_2)$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de m dont λ_1, λ_2

A montrer $\langle v, m(v)\rangle = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2$

Preuve En utilisant la linéarité de m ainsi que les propriétés du produit scalaire nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle v, m(v)\rangle &= \langle \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2, m(\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2)\rangle \\
&= \langle \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2, \alpha_1 m(e'_1) + \alpha_2 m(e'_2)\rangle \\
&= \langle \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2, \alpha_1\lambda_1 e'_1 + \alpha_2\lambda_2 e'_2\rangle \\
&= \lambda_1\alpha_1^2 \cdot \underbrace{\langle e'_1, e'_1\rangle}_{=\|e'_1\|^2=1} + \lambda_2\alpha_1\alpha_2 \underbrace{\langle e'_1, e'_2\rangle}_{=0} + \lambda_1\alpha_2\alpha_1 \underbrace{\langle e'_2, e'_1\rangle}_{=0} + \lambda_2\alpha_2^2 \cdot \underbrace{\langle e'_2, e'_2\rangle}_{\|e'_2\|^2=1} = \\
&= \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2.
\end{aligned}$$

***Corrigé de l'exercice* 17**

Le développement de Taylor d'ordre 2 de f autour d'un point $a = (a_1; a_2) \in U$ nous donne

pour $x = (x_1; x_2)$ proche de a l'approximation puis les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot(x_2-a_2)\\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)\cdot(x_1-a_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)\cdot(x_1-a_1)(x_2-a_2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)\cdot(x_2-a_2)^2\\
&= f(a) + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1-a_1\\ x_2-a_2\end{pmatrix}\right\rangle\\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)\cdot(x_1-a_1)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)\cdot(x_1-a_1)(x_2-a_2) + \cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)\cdot(x_2-a_2)^2\right)\\
&= f(a) + \langle \nabla f(a), X-A\rangle\\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\left\langle \begin{pmatrix} x_1-a_1\\ x_2-a_2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)\cdot(x_1-a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)\cdot(x_2-a_2)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)\cdot(x_1-a_1) + \cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)\cdot(x_2-a_2)\end{pmatrix}\right\rangle\\
&= f(a) + \langle \nabla f(a), X-A\rangle\\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\left\langle \begin{pmatrix} x_1-a_1\\ x_2-a_2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a) & \cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1-a_1\\ x_2-a_2\end{pmatrix}\right\rangle\\
&= f(a) + \langle \nabla f(a), X-A\rangle + \frac{1}{2}\cdot\langle X-A; H_{f,a}\cdot(X-A)\rangle,
\end{aligned}$$

où $H_{f,a}$ est la hessienne de f évaluée en a et X, A les matrices colonnes correspondant aux composantes des points x, a dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Nous avons donc

$$f(x) = f(a) + +\langle \nabla f(a), x-a\rangle + \frac{1}{2}\cdot\langle x-a; h_{f,a}(x-a)\rangle,$$

où $h_{f,a}$ est l'endomorphisme symétrique dont la matrice est $H_{f,a}$, la hessienne de f évaluée en a.

***Corrigé de l'exercice* 18**

Nous commençons par rechercher les points critiques de f. Pour cela nous devons résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + z^2 &= 0\\ 2y &= 0\\ 2xz + 4z &= 0\end{cases}$$

Le deuxième équation nous donne $y = 0$ tandis que la troisième $2z(x+2) = 0$ donne soit $z = 0$, soit $x = -2$:

- Si $z = 0$ la première équation donne $3x^2 - 6x = 0$ et donc $3x(x-2) = 0$. Nous avons donc deux points critiques : $(0; 0; 0)$ et $(2; 0, 0)$.
- Si $x = -2$ la première équation donne $12 + 12 + z^2 = 0$ et cette équation n'a pas de solution réelle.

Pour déterminer la nature de ces points critiques, nous calculons la hessienne :

$$H_{f,(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -6+6x & 0 & 2z\\ 0 & 2 & 0\\ 2z & 0 & 4+2x\end{pmatrix}.$$

L'évaluation de cette matrice aux différents points critiques nous donne

$$H_{f,(0;0;0)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad H_{f,(2;0;0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons donc conclure que f possède...

- un point de selle en $(0;0;0)$ car la hessienne évaluée en ce point possède les valeurs propres $-6,\ 2$ et 4 qui sont de signes différents.
- un minimum local en $(2;0;0)$ car la hessienne évaluée en ce point possède les valeurs propres $6,\ 2$ et 8 qui sont toutes positives. Ce minimum n'est pas global car $f(x,0,0) = x^3$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes et petites.

***Corrigé de l'exercice* 19**

Calcul des points critiques :

In[52]:=
```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_, z_] := x^4 + y^4 + z^4 + x y  + y z
eqns = D[f[x, y, z], {{x, y, z}, 1}] == {0, 0, 0}
ptsCrit = Solve[eqns, {x, y, z}, Reals]
```

Out[52]= $\{4x^3 + y, x + 4y^3 + z, y + 4z^3\} = \{0, 0, 0\}$

Out[53]= $\{\{x \to 0, y \to 0, z \to 0\}, \left\{x \to \frac{1}{2^{7/8}} - 2^{1/8}, y \to \frac{1}{2^{5/8}}, z \to -\frac{1}{2^{7/8}}\right\},$
$\left\{x \to 2^{1/8} - \frac{1}{2^{7/8}}, y \to -\frac{1}{2^{5/8}}, z \to \frac{1}{2^{7/8}}\right\}\}$

Calcul de hessienne et des valeurs propres de la celle-ci évaluée à chacun des points critiques :

In[54]:=
```
Hf = D[f[x, y, z], {{x, y, z}, 2}]
Table[
  Eigenvalues[Hf /. ptsCrit[[i]]],
  {i, 1, Length[ptsCrit]}
] // N
```

Out[54]= $\{\{12x^2, 1, 0\}, 1, 12y^2, 1, \{0, 1, 12z^2\}\}$

Out[55]= $\{\{-1.41421, 1.41421, 0.\}, \{5.9021, 3.56762, 2.7109\}, \{5.9021, 3.56762, 2.7109\}\}$

En conclusion, f possède en...

- $(0; 0; 0)$ un point de selle (valeurs propres de signe différents).
- $\left(\frac{1}{2^{7/8}} - 2^{1/8}, \frac{1}{2^{5/8}}, -\frac{1}{2^{7/8}}\right)$ et en $\left(2^{1/8} - \frac{1}{2^{7/8}}, -\frac{1}{2^{5/8}}, \frac{1}{2^{7/8}}\right)$ des minima globaux (valeur propres toutes positives)

Pour justifier que le minima sont globaux, commençons par évaluer f aux points critiques :

In[56]:=
```
f[x, y, z] /. ptsCrit // N
```

Out[56]= $\{0., -0.353553, -0.353553\}$

f prend la même valeur à chaque minima. Si ces minima ne sont pas globaux alors f doit pouvoir prendre des valeurs arbitrairement petite (une fonction polynomial ne peut avoir d'asymptote). Recherchons les points de $\mathbb{R}^3$ prenant la valeur -1 :

In[57]:=
```
Solve[f[x, y, z ] == -1, {x, y, z}, Reals]
```

Out[57]= $\{\}$

Comme la valeur -1 n'est jamais atteinte et comme f est continue aucune valeur inférieure à -1 n'est atteignable ce qui justifie donc que les minima sont globaux.

***Corrigé de l'exercice* 20**

(a) Soit (t_i, θ_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$ les mesures faites. Nous devons trouver les paramètres a, b, c tels que la somme des carrés écarts verticaux entre le graphe de T et le points correspondant aux mesures faites soit minimale. Nous devons donc minimiser la somme suivante :

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{5} (\theta(t_i) - \theta_i)^2 = \sum_{i=1}^{5} (a \cdot b^{t_i} + c - \theta_i)^2.$$

Introduisons ceci dans Mathematica :

In[58]:=
```
Clear["Global`*"]
abs = {0, 6, 12, 18, 24};
ord = {98, 68, 56, 50, 45};
pts = Transpose[{abs, ord}];
temp[a_, b_, c_][t_] := a*b^t + c
f[a_, b_, c_] := Apply[
  Plus, (temp[a, b, c][abs] - ord)^2
]
f[a, b, c]
```

Out[58]= $(ab^{24} + c - 45)^2 + (ab^{18} + c - 50)^2 + (ab^{12} + c - 56)^2 + (ab^6 + c - 68)^2 + (a + c - 98)^2$

Nous cherchons maintenant les points critiques de f :

In[59]:=
```
eqns = D[f[a, b, c], {{a, b, c}, 1}] == {0, 0, 0};
ptsCrit = Solve[eqns && b > 0, {a, b, c}, Reals]
```

Out[59]= $\left\{\left\{a \to 0, b \to 1, c \to \frac{317}{5}\right\}, \left\{a \to \boxed{54.4\ldots}, b \to \boxed{0.881\ldots}, c \to \boxed{43.4\ldots}\right\}\right\}$

Essayons d'écrire le second point critique à l'aide de radicaux :

In[60]:=
```
% // ToRadicals
```

Out[60]= $\left\{\left\{a \to 0, b \to 1, c \to \frac{317}{5}\right\}, \left\{a \to \boxed{54.4\ldots}, b \to \boxed{0.881\ldots}, c \to \boxed{43.4\ldots}\right\}\right\}$

Mathematica n'y arrive pas. Nous devrons donc nous contenter d'une approximation numérique.

Identifions maintenant la nature de ces points critiques en calculant les valeurs propres de la hessienne évaluée à chacun des points critiques :

In[61]:=
```
Hf = D[f[a, b, c], {{a, b, c}, 2}];
Table[
  Eigenvalues[Hf /. ptsCrit[[i]]],
  {i, 1, Length[ptsCrit]}
] // N
```

Out[61]= $\{\{1493.04, -1483.04, 9.99955\}, \{147635., 4.18889, 0.527758\}\}$

Le premier point critique est un point de selle (valeurs propres de signes différents)

tandis que le second correspondant à un minimum (valeurs propres toutes positives). Demandons à Mathematica une approximation numérique du second point critique :

In[62]:=
```
ptsCrit[[2]] // N
```

Out[62]= $\{a \to 54.3968, b \to 0.881272, c \to 43.3946\}$

L'ajustement au sens des moindres carrés est donc

$$\theta(t) = 43.3946 + 54.3968 \cdot 0.881272^t.$$

(b) Une recherche dans l'aide de Mathematica (par exemple en parcourant les fonctions en lien avec la fonction `Fit`) permet de trouver que la fonction Mathematica déterminant un ajustement qui n'est pas une combinaison linéaire de fonctions données est `NonlinearModelFit` :

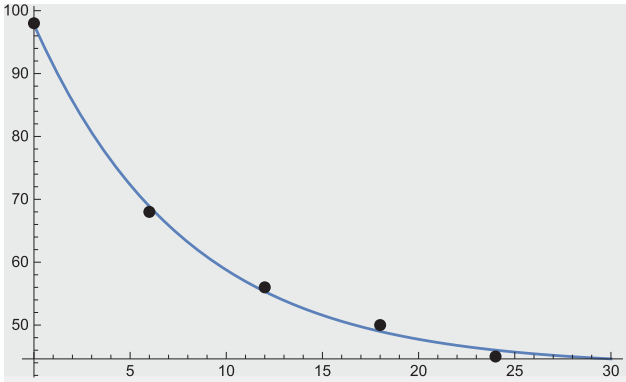
In[63]:=
```
g[t_] := (NonlinearModelFit[pts, temp[a, b, c][tt],
   {a, b, c}, tt] // Normal) /. tt -> t
g[t]
```

Out[63]= $43.3946 + 54.3968 \times 0.881272^t$

Nous obtenons effectivement le même résultat. Notons que dans le code ci-dessus, l'utilisation de la règle de remplacement ainsi que de la commande `normal` sont là pour permettre, si nécessaire, l'utilisation de la fonction ajustée.

(c) In[64]:=
```
Plot[
  temp[a, b, c][t] /. ptsCrit[[2]], {t, 0, 30},
  Epilog -> {PointSize[0.02], Point[pts]}
]
```

Out[64]=

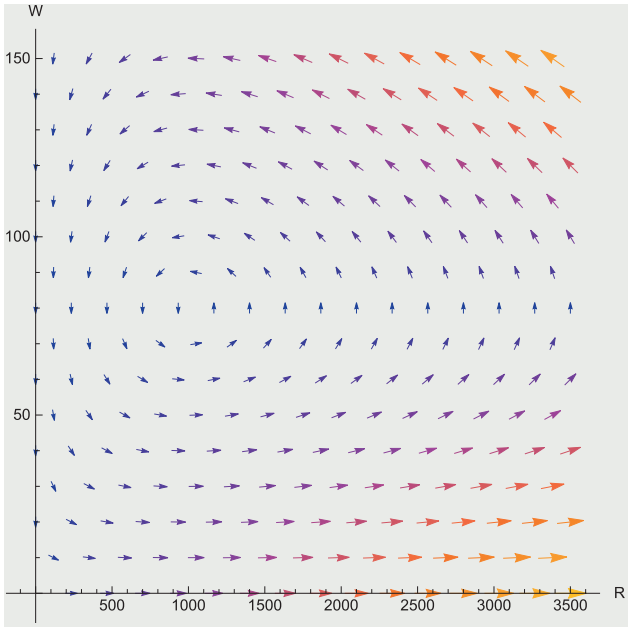


***Corrigé de l'exercice* 21**

(a)

In[65]:=
```
Clear["Global`*"]
f[R_, W_] := {
  0.08 R - 0.001 R W,
  -0.02 W + 0.00002 R W
}
X0 = {2000, 40};
champ = VectorPlot[
  f[R, W], {R, 0, 3000}, {W, 0, 150},
  Axes -> True, Frame -> False, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"R", "W"},
  VectorScaling -> "Linear"]
]
```

Out[65]=



(b) Comme le champ vectoriel au point$(2000; 40)$ pointe en haut à droite, cela signifie que la population de prédateurs et de proie augmente toutes deux. Bien que la population de prédateurs augmente, celle-ci n'est pas suffisamment importante pour que la population de proies diminue.

(c) La population n'évolue pas si $\dot{R}(t) = \dot{W}(t) = 0$. Il faut donc résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} 0 &= 0.08R - 0.001RW \\ 0 &= -0.02W + 0.00002RW \end{cases}$$

En factorisant la première équations nous obtenons $R(0.08 - 0.001W) = 0$. Nous avons $R = 0$ ou $W = 80$. Si nous insérons $R = 0$ dans la seconde équation nous obtenons $W = 0$ et si nous insérons $W = 80$ dans celle-ci nous obtenons $R = 1000$. Par conséquent, il n'a pas d'évolution de la population s'il n'y a ni prédateur ni proie ou s'il y 80 prédateurs et proies.

(d) (i) La longueur du pas est $h = \frac{10-0}{5} = 2$ et nous avons

$$\begin{pmatrix} R_{k+1} \\ W_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_k \\ W_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0.08R_k - 0.001R_kW_k \\ -0.02W_k + 0.00002R_kW_k \end{pmatrix}, \ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

avec $R_0 = 2000$ et $W_0 = 40$. Nous pouvons alors calculer le premier itéré

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_1 \\ W_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_0 \\ W_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0.08R_0 - 0.001R_0W_0 \\ -0.02W_0 + 0.00002R_kW_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2000 \\ 40 \end{pmatrix} + 0.4 \begin{pmatrix} 0.082000 - 0.001 \cdot 2000 \cdot 40 \\ -0.02 \cdot 40 + 0.00002 \cdot 2000 \cdot 40 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2160 \\ 41.6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En répétant l'opération nous obtenons

$$\begin{pmatrix} R_2 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2325.89 \\ 43.5302 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_3 \\ W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2495.54 \\ 45.8389 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_4 \\ W_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2666.04 \\ 48.581 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_5 \\ W_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2833.57 \\ 51.8186 \end{pmatrix}.$$

Au temps $t = 10$, il y aura donc 2834 proie et 52 prédateurs.

(ii)

In[66]:=
```
t0 = 0.; (*temps initiale *)
tt = 10; (*valeur pour laquelle on veut estimer (
   x(t),y(t)*)
n = 50; (*nombre de pas*)
h = (tt - t0)/n; (*longueur du pas*)
new[{R_, W_}] := {R, W} + h f[R, W]
pts = NestList[new, X0, n];
pts[[-1]] (*dernier point de la liste*)
```

Out[66]=
```
{2823.19, 52.9364}
```

(e) (i)

In[67]:=
```
tMax = 200;
s = NDSolve[
  {R'[t], W'[t]} == f[R[t], W[t]] && {R[t0], W[t0
     ]} == X0,
  {R[t], W[t]}, {t, t0, tMax}
]
```

Out[67]= $\{\{R[t] \to \text{InterpolatingFunction}[\square][t],$
$W[t] \to \text{InterpolatingFunction}[\square][t]\}\}$

In[68]:=
```
X[t_] := Evaluate[{R[t], W[t]} /. s[[1]]]
X[tt]
```

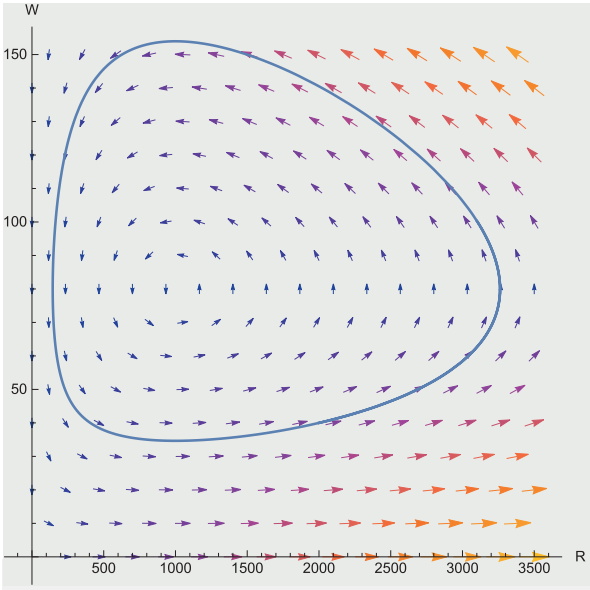
Out[68]=
```
{2821.38, 53.0649}
```

Mathematica calcule qu'il y a 2821 proies et 53 prédateurs, ce qui ne diffère que légèrement du résultat obtenu à la main.

(ii)

In[69]:=
```
solMathematica =
ParametricPlot[X[t], {t, t0, tMax}, AspectRatio
   -> 3/4];
Show[{champ, solMathematica}]
```

Out[69]=



***Corrigé de l'exercice* 22**

(a) Nous avons $A^k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0_2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ donc, par définition de l'exponentielle matricielle,

$$\exp(A) = I_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I_2 + 0_2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que ce résultat est une généralisation d'un résultat valable sur l'exponentielle réelle pour laquelle nous avons

$$\exp(0) = 1.$$

Le nombre 0 est l'élément neutre de l'addition de réels tandis que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est l'élément neutre de l'addition de matrices et le nombre 1 est l'élément neutre de la multiplication de réels tandis que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est l'élément neutre de l'addition de matrices.

(b) Comme $B^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, nous avons $B^k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2$ et donc

$$\exp(B) = I_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = I_2 + \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k!} B^k = I_2 + \frac{1}{1!} B^1 = I_2 + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

***Corrigé de l'exercice* 23**

(a) (i) Comme $A^k = A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= I_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\
&= I_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot 1^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ii) Comme $B^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, nous avons $B^k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2$ et donc

$$\begin{aligned}
\exp(B) &= I_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \\
&= I_2 + \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k!} B^k \\
&= I_2 + \frac{1}{1!} B^1 \\
&= I_2 + B \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(iii) Posons $C = A + B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Comme $C^2 = C$, nous avons $C^k = C$ pour tout

$k \in \mathbb{N}^*$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\exp(C) &= I_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C^k \\
&= I_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!} & \frac{1}{k!} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ 0 + 1 & 1 + 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} & 1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 1^k & \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 1^k\right) - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(1) & \exp(1) - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e & e - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Nous avons

$$\begin{aligned}
\exp(A + B) - \exp(A) \cdot \exp(B) &= \begin{pmatrix} e & e - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e & e - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nous constatons donc que la propriété de l'exponentielle réelle stipulant que

$$\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b), \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

n'est *pas généralisable* aux matrices : pour que cette propriété reste valable il faut que les matrices commutent (voir la propriété 3.13(e)).

***Corrigé de l'exercice* 24**

(a) $\exp(0_n) = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} 0_n^k = I_n + 0_n = I_n$

(b) S'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = 0_n$ nous avons alors

$$\exp(A) = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I_n + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} A^k$$

et la somme à calculer est une somme finie !

(c) Si B est un matrice diagonale alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la matrice B^k est diagonale avec

$$B^k = (b_{ij}^k) \text{ pour } k > 0.$$

$\exp(B)$ est donc aussi une matrice diagonale dont les éléments de la diagonale valent

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} b_{ii}^k = \exp(b_{ii})$$

Nous avons donc

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} \exp(b_{11}) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp(b_{nn}) \end{pmatrix}$$

(d) (i) Nous commençons par montrer par récurrence qui si $C = P \cdot \hat{C} \cdot P^{-1}$ alors

$$C^k = P \cdot \hat{C}^k \cdot P^{-1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

$\boxed{k = 1}$ $P \cdot \hat{C}^1 \cdot P^{-1} = C = C^1$ par définitions de P et $\hat{C}$.

$\boxed{k \to k+1}$ **Hypothèse de récurrence** $C^k = P \cdot \hat{C}^k \cdot P^{-1}$

A montrer $C^{k+1} = P \cdot \hat{C}^{k+1} \cdot P^{-1}$:

Preuve

$$\begin{aligned} C^{k+1} &= C^k \cdot C \\ &= (P \cdot \hat{C}^k \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot \hat{C} \cdot P^{-1}) && \text{(hyp. de récurrence et propr. de} C) \\ &= P \cdot \big(\hat{C}^k \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot C\big) \cdot P^{-1} && \text{(assiociativité de la multiplication)} \\ &= P \cdot (\hat{C}^k \cdot C) \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot (\hat{C}^{k+1}) \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

(ii) Nous pouvons maintenant calculer l'exponentielle de C :

$$\begin{aligned} \exp(C) &= I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C^k && \text{(définition de l'exponentielle)} \\ &= P I_n P^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} P \cdot \hat{C}^k \cdot P^{-1} && \text{(propr. précédente de } C^k) \\ &= P \cdot \left(I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{C}^k \right) \cdot P^{-1} && \text{(distributivité)} \\ &= P \cdot \exp(\hat{C}) \cdot P^{-1} && \text{(définition de l'exponentielle)} \end{aligned}$$

***Corrigé de l'exercice* 25**

Comme $-A \cdot A = A \cdot (-A) = -A^2$, nous déduisons de la propriété 3.13(f) que

$$\exp(A) \cdot \exp(-A) = \exp\big(A + (-A)\big) = \exp(0 \cdot I_n) = I_n.$$

Par conséquent, $\exp(-A)$ est l'inverse de $\exp(A)$, ce qui une extension du résultat que nous avions pour l'exponentielle réelle.

***Corrigé de l'exercice* 26**

(a) Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_2) = (3-\lambda)(-1-\lambda).$$

Nous avons donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$. Nous cherchons des générateurs des espaces propres associés :

- Pour $\lambda_1 = 3$, un générateur de l'espace propre est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Pour $\lambda_2 = -1$, nous cherchons $V_2 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tel que $AV_2 = -1 \cdot V_2$. Nous obtenons le système suivant :
$$\begin{cases} 3x + 4y = -x \\ \qquad -y = -y \end{cases}$$
La première équation nous donne $4x + 4y = 0$ et nous pouvons choisir $V_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Nous avons donc $M = P\hat{M}P^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \hat{M} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

et donc

$$\begin{aligned} \exp(M) &= P\exp(\hat{M})P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} \\ 0 & -e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2} \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3} & e^{3} - e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Les valeurs propre de tM sont $\mu_1 = t\lambda_1 = 3t$ et $\mu_2 = t\lambda_2 = -t$ tandis que les générateurs des espaces propres sont inchangés. En effet si pour un matrice carré M nous avons un vecteur propre v correspondant à une valeur propre λ, nous avons

$$(tM)v = t(Mv) = t(\lambda v) = (t\lambda)v$$

donc v est aussi un vecteur propre de tM et ce vecteur correspond à la valeur propre $t\lambda$.

En reprenant les calculs du point précédent, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \exp(tM) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\mu_1} & 0 \\ 0 & e^{\mu_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\mu_1} & e^{\mu_1} - e^{\mu_2} \\ 0 & e^{\mu_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{3t} - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 27

(a) Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0$ et les vecteurs $V_1 = \left(\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right), V_2 = \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right)$ sont des générateurs des espaces propres associés. Nous avons alors

$$A = \begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}.$$

et nous pouvons alors calculer l'exponentielle de A en utilisant la propriété 3.13(d) :

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= \begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}e^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot (-1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-2+3e^2 & -6+6e^2\\ 1-e^2 & 3-2e^2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = i\pi,\ \lambda_2 = -i\pi$ et les vecteurs $V_1 = \left(\begin{smallmatrix}-17+i\\10\end{smallmatrix}\right), V_2 = \left(\begin{smallmatrix}-17-i\\10\end{smallmatrix}\right)$ sont des générateurs des espaces propres associés. Nous avons alors

$$B = \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}i\pi & 0\\ 0 & -i\pi\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix}^{-1}.$$

et nous pouvons alors calculer l'exponentielle de A en utilisant la propriété 3.13(d) :

$$\begin{aligned}
\exp(B) &= \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix}i\pi & 0\\ 0 & -i\pi\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}e^{i\pi} & 0\\ 0 & e^{-i\pi}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix}^{-1}\\
&= (-1)\begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix}^{-1}\\
&= (-1)\begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix}^{-1}\\
&= (-1)\begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-17+i & -17-i\\ 10 & 10\end{pmatrix}^{-1}\\
&= (-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Les valeurs propres de C sont $\lambda_1 = 1+2i,\ \lambda_2 = 1-2i$ et les vecteurs $V_1 = \left(\begin{smallmatrix}i\\1\end{smallmatrix}\right), V_2 = \left(\begin{smallmatrix}-i\\1\end{smallmatrix}\right)$ sont des générateurs des espaces propres associés,Nous avons alors

$$C = \begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1+2i & 0\\ 0 & 1-2i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}.$$

et nous pouvons alors calculer l'exponentielle de C en utilisant la propriété 3.13(d) :

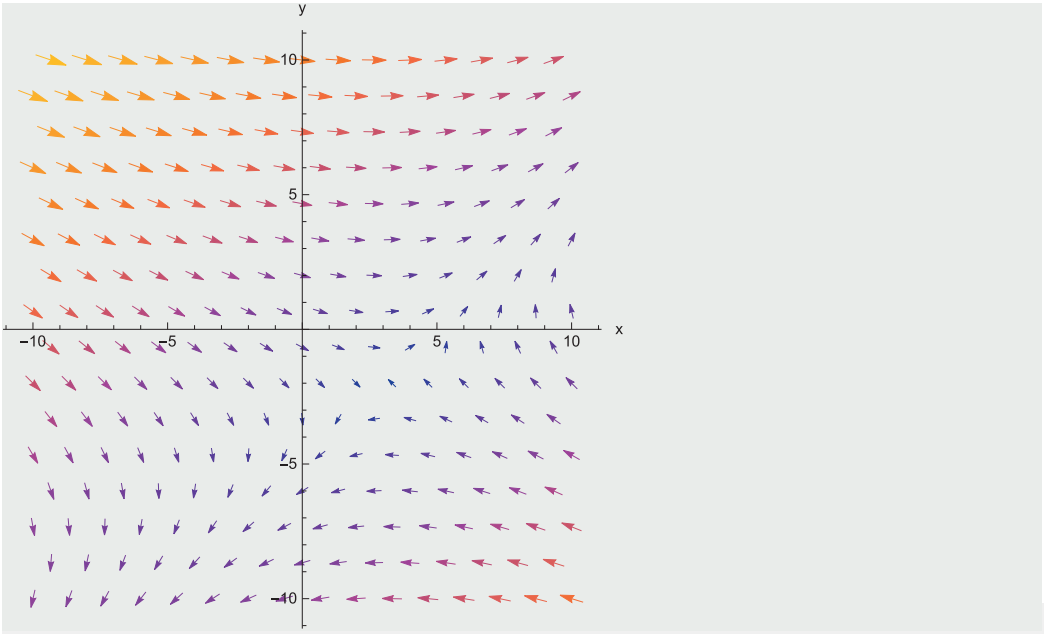
$$\begin{aligned}
\exp(C) &= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \exp \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{1+2i} & 0 \\ 0 & e^{1-2i} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \\
&= \frac{e}{2i} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2i} & 0 \\ 0 & e^{-2i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \\
&= \frac{e}{2i} \begin{pmatrix} ie^{2i} + ie^{-2i} & -e^{2i} + e^{-2i} \\ e^{2i} - e^{-2i} & ie^{2i} + ie^{-2i} \end{pmatrix} \\
&= e \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{2i} + ie^{-2i}) & -\frac{1}{2i}(e^{2i} - e^{-2i}) \\ \frac{1}{2i}(e^{2i} - e^{-2i}) & \frac{1}{2}(e^{2i} + ie^{-2i}) \end{pmatrix} \\
&= e \begin{pmatrix} \cos(2) & -\sin(2) \\ \sin(2) & \cos(2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e\cos(2) & -e\sin(2) \\ e\sin(2) & e\cos(2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

***Corrigé de l'exercice* 28**

(a)

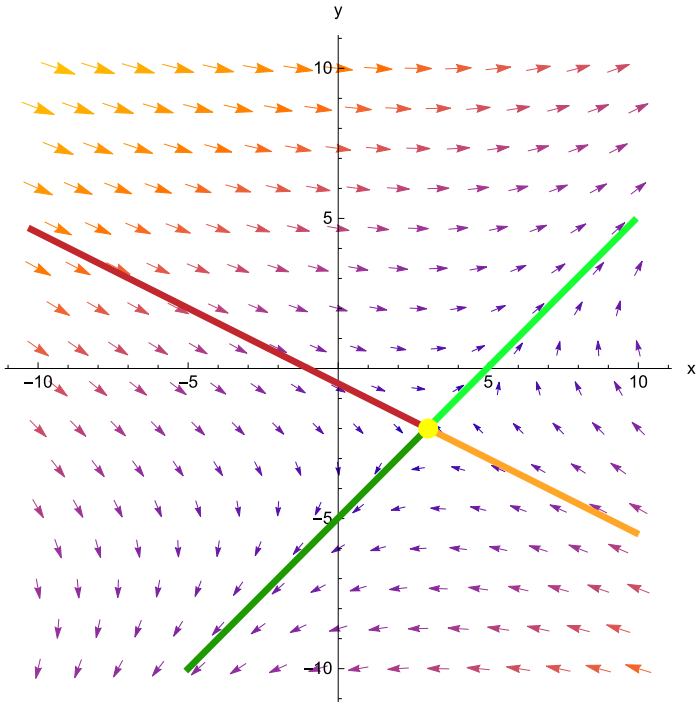
In[70]:=
```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_] := {-x + 2 y + 7, x - 3}
champ = VectorPlot[
  f[x, y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
  Axes -> True, Frame -> False, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"x", "y"},
  VectorScaling -> "Linear"
]
```

Out[70]=



En fonction de la condition initiale, la solution a un des graphes suivants :

- un point P dans le cadran IV (en jaune dans la graphique ci-dessous).
- est une demi-droite de pente négative dont l'extrémité est le point P (en rouge et en orange dans la graphe ci-dessous) ; lorsque le temps augmente, la graphe s'approche de P.
- est une demi-droite de pente positive dont l'extrémité est le point point P (en vert clair et foncé dans la graphe ci-dessous) ; lorsque le temps augmente, la courbe s'éloigne de P.
- une courbe avec une asymptote de pente négative lorsque $t \to -\infty$ (rouge ou orange dans la graphe ci-dessous) et une asymptote de pente positive lorsque $t \to +\infty$ (verte dans le graphe ci-dessous).



(b) (i) Nous avons un système d'équations différentielles linéaire inhomogène à coefficients constants qui peut s'écrire

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r} + \vec{b},\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

avec $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) **Solution du système homogène associé** Le système homogène associé est

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$$

et, par le théorème 3.20 sa solution générale est

$$\vec{r}_h(t) = \exp(tA) \cdot \vec{c},\ \vec{c} \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}).$$

Pour calculer, $\exp(tA)$, nous commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

Nous avons donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = -2$ et$\lambda_2 = 1$. Nous cherchons des générateurs des espaces propres associés :

- Pour $\lambda_1 = -2$, nous cherchons $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $AV_1 = -2 \cdot V_1$. Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} -x + 2y = -2x \\ \qquad\ \ x = -2y \end{cases}$$

Les deux équations sont équivalentes et nous pouvons choisir $V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Pour $\lambda_2 = 1$, nous cherchons $V_2 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tel que $AV_2 = 1 \cdot V_2$. Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} -x + 2y = x \\ \qquad\quad x = y \end{cases}$$

Les deux équations sont équivalentes et nous pouvons choisir $V_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Les valeurs propres de tA sont alors $-2t,\ t$ tandis que $V_1,\ V_2$ sont des générateurs des espaces propres associés. Nous avons alors

$$tA = P \cdot t\hat{A} \cdot P^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

et donc

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= P \cdot \exp(t\hat{A}) \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^{t} & 2e^{t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{-2t} + e^{t} & 2e^{t} - 2e^{-2t} \\ e^{t} - e^{-2t} & e^{-2t} + 2e^{t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solution générale du système homogène est donc

$$\vec{r}_h(t) = \exp(tA) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{-2t} + e^{t} & 2e^{t} - 2e^{-2t} \\ e^{t} - e^{-2t} & e^{-2t} + 2e^{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) **Solution particulière du système** Une solution particulière simple est une fonction constante. Si nous faisons l'hypothèse qu'une telle fonction est une solution alors elle doit satisfaire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 0 &= -x + 2y + 7 \\ 0 &= x - 3 \end{cases}$$

La deuxième équation nous donne $x = 3$ et la première $y = -2$. Nous avons donc la solution particulière suivante :

$$\vec{r}_p(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que cette solution particulière correspond au point P intervenant dans l'analyse du champ vectoriel associé au système d'équations différentielles.

(3) **Solution générale du système inhomogène** La solution générale $\vec{r}$ du système inhomogène est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé :

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_p(t) + \vec{r}_h(t)\\ &= \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \exp(tA)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2e^{-2t}+e^t & 2e^t-2e^{-2t}\\ e^t-e^{-2t} & e^{-2t}+2e^t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(4) **Solution du système avec condition initiale** Nous devons avoir $\vec{r}(0) = \left(\begin{smallmatrix}0\\-5\end{smallmatrix}\right)$ donc c_1, c_2 doivent satisfaire les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \exp(0\cdot A)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il s'en suit que $c_1 = -3$ et $c_2 = -3$ et la solution du système avec condition initiale est

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2e^{-2t}+e^t & 2e^t-2e^{-2t}\\ e^t-e^{-2t} & e^{-2t}+2e^t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3-3e^t\\-2-3e^t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(ii) La courbe obtenue satisfait les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 3-3k\\ y = -2-3k\end{cases} \qquad \text{avec } k\in\mathbb{R}_+^*,$$

la restriction $k \in \mathbb{R}_+^*$ provenant du fait que nous avons la relation $k = e^t$ et l'ensemble des valeurs de l'exponentielle réelle est $\mathbb{R}_+^*$. En soustrayant les deux équations paramétriques et en isolant y, nous constatons que la courbe a pour équation cartésienne

$$y = x - 5 \quad \text{avec} \quad x < 3,$$

ce qui correspond à une demi-droite dont l'extrémité $(3; -2)$ n'est pas comprise.

(c) (i) Nous reprenons la solution générale du système inhomogène trouvée au point précédent et imposons $\vec{r}(0) = \left(\begin{smallmatrix}-5\\1\end{smallmatrix}\right)$. Les équations équivalentes suivantes doivent donc être satisfaites pas c_1, c_2 :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \exp(0\cdot A)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il s'en suit que $c_1 = -8$ et $c_2 = 3$ et la solution du système avec condition initiale est

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-2t} + e^t & 2e^t - 2e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} & e^{-2t} + 2e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 - \frac{22e^{-2t}}{3} - \frac{2e^t}{3} \\ -2 + \frac{11e^{-2t}}{3} - \frac{2e^t}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ii) D'après l'analyse du champ vectoriel faite un début d'exercice $\vec{r}$ devrait posséder un asymptote oblique $y = mx + h$. En faisant un raisonnement similaire à celui fait au cours de mathématiques, il est possible de montrer qu'une telle asymptote existe si et seulement les limites

$$m = \lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad h = \lim_{t \to +\infty} y(t) - m \cdot x(t)$$

existent et sont finies. Calculons ces limites :

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} \\
&= \lim_{t \to +\infty} \frac{-2 + \frac{11e^{-2t}}{3} - \frac{2e^t}{3}}{3 - \frac{22e^{-2t}}{3} - \frac{2e^t}{3}} \\
&= \lim_{t \to +\infty} \frac{-6 + 11e^{-2t} - 2e^t}{9 - 22e^{-2t} - 2e^t} \\
&= \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t\big(-6e^{-t} + 11e^{-3t} - 2\big)}{e^t\big(9e^{-t} - 22e^{-3t} - 2\big)} \\
&= \frac{-6 \cdot 0 + 11 \cdot 0 - 2}{9 \cdot 0 + -22 \cdot 0 - 2} \\
&= 1 \\
h &= \lim_{t \to +\infty} y(t) - m \cdot x(t) \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left(-2 + \frac{11e^{-2t}}{3} - \frac{2e^t}{3}\right) - 1 \cdot \left(3 - \frac{22e^{-2t}}{3} - \frac{2e^t}{3}\right) \\
&= \lim_{t \to +\infty} -5 - \frac{11e^{-2t}}{3} \\
& \quad -5 - \frac{11 \cdot 0}{3} \\
&= -5
\end{aligned}$$

Lorsque t augmente, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $-\infty$ et le graphe de la solution s'approche donc de la partie de la droite d'équation

$$y = x - 5$$

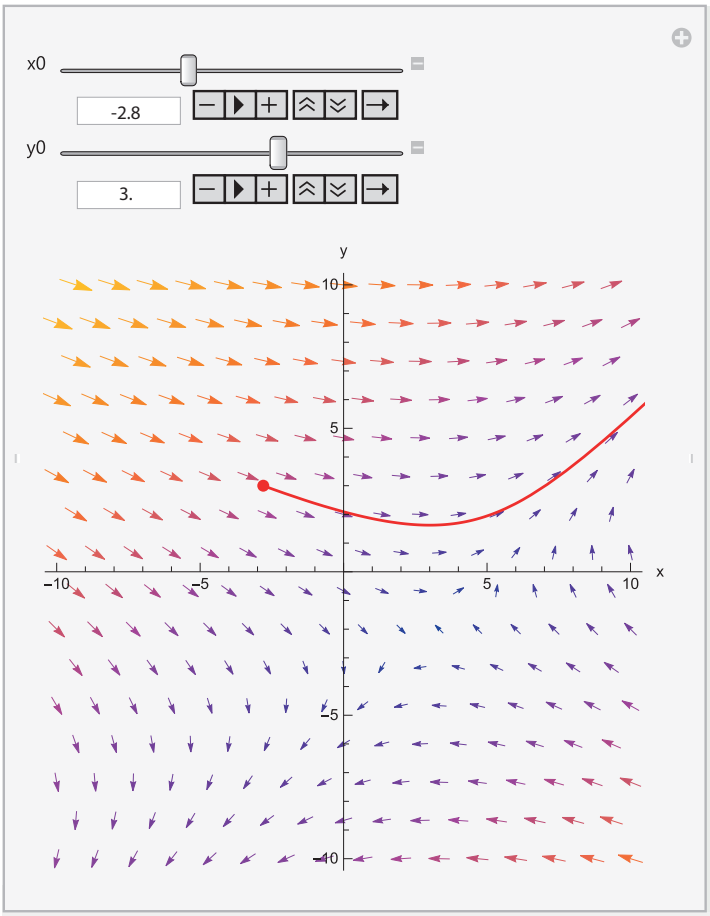
se trouvant dans le quadrant III.

(d)

In[71]:=

```
grapheSol[x0_, y0_] :=
Module[
  {sol, graphe, tmin, tmax},
  tmin = 0;
  tmax = 5;
  sol = DSolve[
    {x'[t], y'[t]} == f[x[t], y[t]] &&
    x[0] == x0 &&
    y[0] == y0,
    {x, y}, t
  ];
  r[t_] := {x[t], y[t]} /. sol[[1]];
  graphe = ParametricPlot[
    r[t], {t, tmin, tmax},
    PlotStyle -> Red
  ];
  Show[
    {
      champ,
      graphe,
      Graphics[
        {PointSize[0.02], Red, Point[{x0, y0}]}
      ]
    },
    PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}
  ]
]
Manipulate[
  grapheSol[x0, y0], {x0, -10, 10}, {y0, -10, 10}
]
```

Out[71]=



***Corrigé de l'exercice* 29**

(a) Nous avons un système d'équations différentielles linéaire homogène de la forme

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r} \text{ avec } A = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

et la solution générale de ce système est

$$\vec{r}(t) = \exp(tA) \cdot \vec{c} \text{ avec } \vec{c} \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}).$$

La difficulté est donc de calculer $\exp(tA)$. Pour cela, nous commençons par définir la matrice A (nous noterons dans Mathematica cette matrice avec une minuscule afin d'éviter tout risque de conflit avec une variable prédéfinie) et calculons les valeurs propres de A ainsi que des générateurs des espaces propres associés :

In[72]:=
```
Clear["Global`*"]
a = -1/5*{{1, 18}, {3, 4}};
{l1, l2} = Eigenvalues[a]
Eigenvectors[a]
```

Out[72]= $\{-2, 1\}$

Out[73]= $\{\{2, 1\}, \{-3, 1\}\}$

Nous définissons alors la matrice de changement de base :

In[74]:=
```
p = Transpose[%];
MatrixForm[p]
```

Out[74]= $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ceci nous permet de calculer $\exp(tA)$:

In[75]:=
```
exp = p.{{E^(t l1), 0}, {0, E^(t l2)}}.Inverse[p];
MatrixForm[exp]
```

Out[75]= $\begin{pmatrix} \frac{2e^{-2t}}{5} + \frac{3e^t}{5} & \frac{6e^{-2t}}{5} - \frac{6e^t}{5} \\ \frac{e^{-2t}}{5} - \frac{e^t}{5} & \frac{3e^{-2t}}{5} + \frac{2e^t}{5} \end{pmatrix}$

La solution générale du système est donc :

In[76]:=
```
r[t_] := exp.{c1, c2}
MatrixForm[r[t]]
```

Out[76]= $\begin{pmatrix} c2\left(\frac{6e^{-2t}}{5} - \frac{6e^t}{5}\right) + c1\left(\frac{2e^{-2t}}{5} + \frac{3e^t}{5}\right) \\ c1\left(\frac{e^{-2t}}{5} - \frac{e^t}{5}\right) + c2\left(\frac{3e^{-2t}}{5} + \frac{2e^t}{5}\right) \end{pmatrix}$

(b) Nous exprimons la solution générale que comme somme de facteurs de e^t et e^{-2t} :

In[77]:=
```
Collect[r[t], {E^t, E^(-2 t)}] // MatrixForm
```

Out[77]= $\begin{pmatrix} \left(\frac{2c1}{5}+\frac{6c2}{5}\right)e^{-2t}+\left(\frac{3c1}{5}-\frac{6c2}{5}\right)e^{t} \\ \left(\frac{c1}{5}+\frac{3c2}{5}\right)e^{-2t}+\left(\frac{2c2}{5}-\frac{c1}{5}\right)e^{t} \end{pmatrix}$

Nous continuons à travailler à la main pour mettre en évidence la structure des coefficients de de e^t et e^{-2t}. Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2c_1+6c_2 \\ c_1+3c_2 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3c_1-6c_2 \\ -c_1+2c_2 \end{pmatrix} e^{t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ &= \frac{c_1+3c_2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{c_1-2c_2}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} \\ &= \hat{c}_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \hat{c}_2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t},\ \hat{c}_1, \hat{c}_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'absence de restriction sur le choix de $\hat{c}_1, \hat{c}_2$ vient du fait que la relation entre c_1, c_2 et $\hat{c}_2, \hat{c}_2$ est donnée par un système d'équations linéaires de déterminant

$$\mathrm{Det}\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = -2$$

donc régulier. La solution a donc la forme demandée.

(c) A discuter en classe.

***Corrigé de l'exercice* 30**
Posons $v = \dot{x}$. Nous pouvons alors écrire notre équation différentielle ordinaire d'ordre 2 comme une système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= 6x - v + 12 \end{cases} \quad \text{avec } \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Ce système est linéaire inhomogène et à coefficients constants. En effet, en posant $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ v \end{smallmatrix}\right)$ nous obtenons le problème de Cauchy

$$\dot{X} = AX + B \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix},\ X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Appliquons l'algorithme de résolution de tels systèmes :

(1) **Solution du système homogène associé** Le système homogène associé est

$$\dot{X} = AX$$

sa solution générale est

$$X_h(t) = \exp(tA) \cdot C,\ C \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}).$$

Pour calculer, $\exp(tA)$, nous commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \mathrm{Det}\,(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

Nous avons donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = -3$ et$\lambda_2 = 2$. Nous cherchons des générateurs des espaces propres associés :

- Pour $\lambda_1 = -3$, nous cherchons $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ v \end{smallmatrix}\right)$ tel que $AX_1 = -3 \cdot X_1$. Nous obtenons le système suivant :
$$\begin{cases} v &= -3x \\ 6x - v &= -3v \end{cases}$$
Les deux équations sont équivalentes et nous pouvons choisir $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$.
- Pour $\lambda_2 = 2$, nous cherchons $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ v \end{smallmatrix}\right)$ tel que $AX_2 = 2 \cdot X_2$. Nous obtenons le système suivant :
$$\begin{cases} v = 2x \\ 6x - v = 2v \end{cases}$$
Les deux équations sont équivalentes et nous pouvons choisir $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Les valeurs propres de tA sont alors $-2t$ et t tandis que X_1 et X_2 sont des générateurs des espaces propres associés. Nous avons alors

$$tA = P \cdot t\hat{A} \cdot P^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\ \hat{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

et donc

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= P \cdot \exp(t\hat{A}) \cdot P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \exp \begin{pmatrix} -3t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-3t} & -e^{-3t} \\ 3e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2e^{-3t} + 3e^{2t} & -e^{-3t} + e^{2t} \\ -6e^{-3t} + 6e^{2t} & 3e^{-3t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La solution générale du système homogène est donc

$$X_h(t) = \exp(tA) \cdot C, \ C \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}).$$

(2) **Solution particulière du système** Une solution particulière simple est une fonction constante. Si nous faisons l'hypothèse qu'une telle fonction est une solution alors elle doit satisfaire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 0 &= v \\ 0 &= 6x - v + 12 \end{cases}$$

La deuxième équation nous donne $x = -2$ et nous avons donc la solution particulière suivante :

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) **Solution générale du système inhomogène** La solution générale X du système inhomogène est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé :

$$\begin{aligned}
X(t) &= X_p(t) + X_h(t) \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \exp(tA) \cdot C, \ C \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

(4) **Solution du système avec condition initiale** Nous devons avoir

$$X(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \exp(0 \cdot A) \cdot C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + C \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

donc $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -8 \end{smallmatrix}\right)$ et

$$\begin{aligned}
X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2e^{-3t} + 3e^{2t} & -e^{-3t} + e^{2t} \\ -6e^{-3t} + 6e^{2t} & 3e^{-3t} + 2e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10e^{-3t} - 5e^{2t} \\ -30e^{-3t} - 10e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 + 2e^{-3t} - e^{2t} \\ -6e^{-3t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A titre de vérification, nous pouvons constater que nous avons bel et bien $\dot{x} = v$.

La solution de l'équation différentielle ordinaire d'ordre 2 avec condition initiale est donc

$$x(t) = -2 + 2e^{-3t} - e^{2t}.$$

***Corrigé de l'exercice* 31**

(a) L'unique force subie par la particule est la force de Lorenz $q\vec{v} \times \vec{B}_0$ et la loi de Newton nous donne alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} q\vec{v} \times \vec{B}_0 &= m\vec{a} \\ q\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} &= m\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} \\ \frac{q}{m}\begin{pmatrix} v_y B_0 \\ -v_x B_0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{v}_x &= \frac{qB_0}{m} \cdot v_y \\ \dot{v}_y &= -\frac{qB_0}{m} \cdot v_x \\ \dot{v}_z &= 0 \end{cases}$$

(b) De la dernière équation nous déduisons que v_z est une fonction constante tandis que les deux premières équations forment un système d'équations différentielles linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et homogène :

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \omega A \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \text{ avec } \omega = \frac{qB_0}{m} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous devons calculer $\exp(\omega t A)$. Pour cela nous commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \operatorname{Det}(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$$

Les valeurs propres de A sont $\pm i$. Calculons des générateurs des espaces propres associés :

- Pour $\lambda_1 = i$ nous cherchons $\vec{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tel que $A\vec{v}_1 = i\vec{v}_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} y &= ix \\ -x &= iy \end{cases}$$

  Nous pouvons donc choisir $\vec{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix}\right)$.
- Pour $\lambda_2 = -i = \bar{\lambda}_1$ nous choisissons $\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -i \end{smallmatrix}\right)$.

Les valeurs propres de $\omega t A$ sont $\pm \omega t i$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont des générateurs des espaces propres. La matrice de changement de base et son inverse sont

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},$$
$$P^{-1} = \frac{1}{-2i}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\exp(\omega t A) &= P \cdot \exp\begin{pmatrix}\omega t i & 0\\ 0 & -\omega t i\end{pmatrix} \cdot P^{-1}\\ &= P\begin{pmatrix}\exp(\omega t i) & 0\\ 0 & \exp(-\omega t i)\end{pmatrix} \cdot P^{-1}.\end{aligned}$$

Posons $z = \exp(\omega t i)$. Nous avons alors $\bar{z} = \exp(-wti)$ et

$$\begin{aligned}\exp(\omega t A) &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & \bar{z}\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z & -iz\\ \bar{z} & i\bar{z}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}z+\bar{z} & -i(z-\bar{z})\\ i(z-\bar{z}) & z+\tilde{z}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(z+\bar{z}) & \frac{1}{2i}(z-\bar{z})\\ -\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) & \frac{1}{2}(z+\bar{z})\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\mathrm{Re}(z) & \mathrm{lm}(z)\\ -\mathrm{lm}(t) & \mathrm{Re}(z)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La solution générale est donc

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\end{pmatrix} &= \exp(\omega t A)\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\\ v_z &= c_3\end{cases}$$

avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ et $\omega = \frac{qB_0}{m}$.

(c) Nous devons avoir

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}v_x(0)\\ v_y(0)\end{pmatrix} &= \exp(w \cdot 0 \cdot A) \cdot \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix}c_1\\ c_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}10^5\\ 0\end{pmatrix}\\ v_z(0) &= c_3 \overset{!}{=} 2 \cdot 10^5\end{cases}$$

donc $c_1 = 10^5\,\mathrm{ms}^{-1},\ \mathrm{c}_2 = 0, \mathrm{c}_3 = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{ms}^{-1}$. Il s'en suit que

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix}10^5\cos(\omega t)\\ -10^5\sin(\omega t)\\ 2\cdot 10^5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ -\sin(\omega t)\\ 2\end{pmatrix} \cdot 10^5\,\mathrm{ms}^{-1}.$$

En intégrant, nous obtenons l'horaire de la particule :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + d_1\\ \frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + d_2\\ 2t + d_3\end{pmatrix} \cdot 10^5\,\mathrm{m}, \quad d_1, d_2, d_2 \in \mathbb{R}$$

La condition initiale nous donne

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \cdot 0 + d_1 \\ \frac{1}{w} \cdot 1 + d_2 \\ 2 \cdot 0 + d_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $d_1 = d_3 = 0$ et $d_2 = \frac{1}{\omega} = -0.001\,\mathrm{m}$. L'horaire de le particule est donc

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 0.001\sin(1000t) \\ 0.001\cos(1000t) - 0.001 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot 10^5 \\ &= \begin{pmatrix} 100\sin(1000t) \\ 100\cos(1000t) - 100 \\ 200000t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -100\sin(-1000t) \\ 100\cos(-1000t) - 100 \\ 200\,000\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 100\cos\left(-1000t + \frac{\pi}{2}\right) \\ 100\sin\left(-1000t + \frac{\pi}{2}\right) - 100 \\ 200\,000\ t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{cases} x(t) &= 100\cos\left(-1000t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y(t) &= 100\sin\left(-1000t + \frac{\pi}{2}\right) - 100 \end{cases}$$

sont les équations paramétriques d'un cercle centré en $(0; -100)$, de rayon 100 et parcouru dans le sens des aiguilles de la montre, l'horaire $\vec{r}$ correspond à une trajectoire hélicoïdale dont l'axe vertical a pour équations $x = 0\,\mathrm{m}$ et $y = -100\,\mathrm{m}$, de $100\,\mathrm{m}$ de rayon avec une rotation dans le sens des aiguilles de la montre.

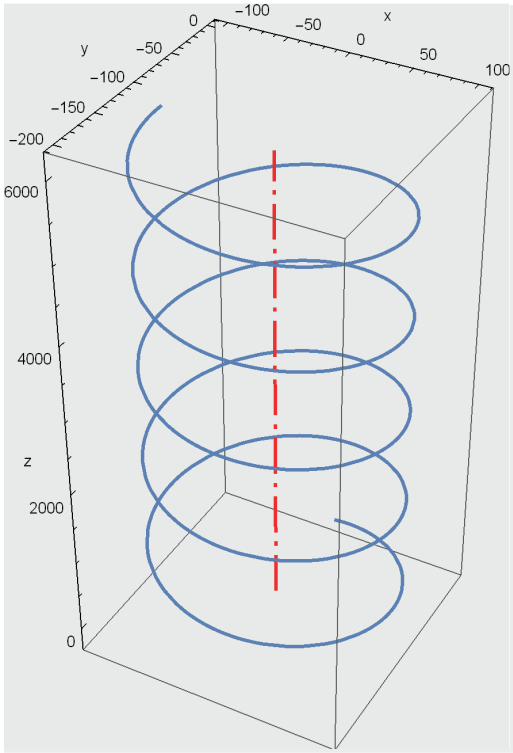
(d)

```
Clear["Global`*"]
w = 1000;
r0 = {0, 0, 0};
v0 = {10^5, 0, 2*10^5};
t0 = 0;
tmax = 0.03;
In[78]:= sol = DSolve[
  {rx''[t], ry''[t], rz''[t]} == {w*ry'[t], -w *rx'[
     t], 0} &&
  {rx'[t0], ry'[t0], rz'[t0]} == v0 &&
  {rx[t0], ry[t0], rz[t0]} == r0,
  {rx, ry, rz}, t
]
```

```
Out[78]= {{rx -> Function[{t}, 100 Sin[1000 t]],
  ry -> Function[{t}, 100 (-1 + Cos[1000 t])],
  rz -> Function[{t}, 200000 t]}}
```

In[79]:=
```
r[t_] := {rx[t], ry[t], rz[t]} /. sol
ParametricPlot3D[
  {
    r[t],
    {0, -100, 200000 t}
  },
  {t, 0, 0.03},
  PlotStyle -> {Automatic, {Red, Dashing[ {0.08,
     0.02, 0.010, 0.02}]}},
  AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  BoxRatios -> {1, 1, 2},
  PlotRange -> All
]
```

Out[79]=



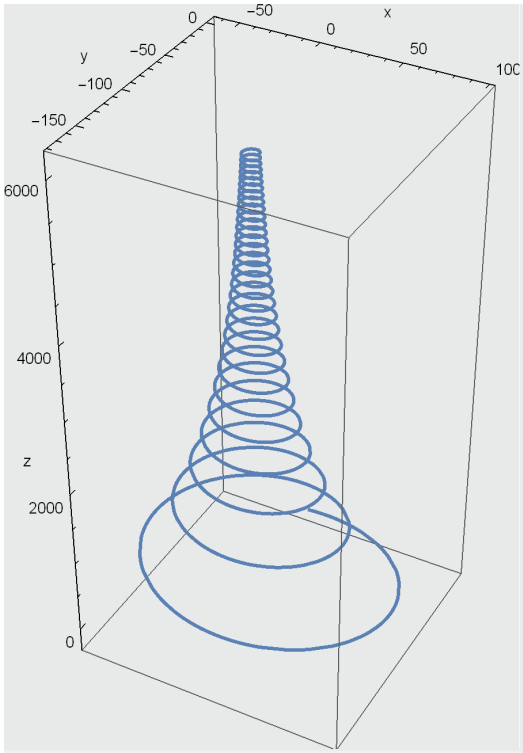
(e)

In[80]:=
```
k = 1.0005;
solBis = NDSolve[
  {
    {rx''[t], ry''[t], rz''[t]} == {w*k^rz[t]*ry'[t
       ], -w*k^rz[t]*rx'[t], 0},
    {rx'[0], ry'[0], rz'[0]} == v0,
    {rx[0], ry[0], rz[0]} == r0
  },
  {rx, ry, rz},
  {t, t0, tmax}
]
```

Out[80]=
```
{{rx→ InterpolatingFunction[□],
  ry→ InterpolatingFunction[□],
  rz→ InterpolatingFunction[□]}}
```

In[81]:=
```
rBis[t_] := {rx[t], ry[t], rz[t]} /. solBis
ParametricPlot3D[
  rBis[t],
  {t, t0, tmax},
  AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  BoxRatios -> {1, 1, 2},
  PlotRange -> All
]
```

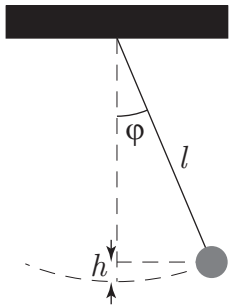
Out[81]=



Corrigé de l'exercice 32

(a) Si nous posons que l'énergie potentielle du pendule est nulle lorsqu'il est au point le plus bas (voir croquis ci-contre) alors lorsque le pendule fait un angle φ avec la verticale l'énergie potentielle vaut

$$E_{\text{pot}} = mgh = mg\big(l - l\cos(\varphi)\big).$$



L'énergie cinétique du pendule vaut

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot\varphi l)^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2.$$

Par conséquent l'énergie mécanique du pendule vaut

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 + mg\big(l - l\cos(\varphi)\big)$$

Comme l'énergie mécanique est constante sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{\text{mec}} &= \frac{1}{2}ml^2 \cdot 2\dot\varphi\ddot\varphi + mg\Big(0 - l\big(-\sin(\varphi)\big)\dot\varphi\Big) \\
&= ml^2\dot\varphi\ddot\varphi + mgl\sin(\varphi)\dot\varphi \\
&= ml\dot\varphi\big(l\ddot\varphi + g\sin(\varphi)\big) \\
&\overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Comme $\dot\varphi$ n'est pas identiquement nulle nous avons le problème de Cauchy suivant :

$$\ddot\varphi = -\frac{g}{l}\sin(\varphi) \quad \text{avec } \dot\varphi(0) = 0,\ \varphi(0) = \frac{\pi}{6}.$$

(b) (i) Sous l'hypothèse que φ est proche de 0, nous avons $\sin(\varphi) \approx \varphi$ et l'équation différentielle prend la forme

$$\ddot\varphi = -\frac{g}{l}\varphi.$$

En posant $\omega = \dot\varphi$, nous avons le système d'équations différentielles linéaire homogène à coefficients constants suivant :

$$\begin{cases} \dot\varphi &= \omega \\ \dot\omega &= -\dfrac{g}{l}\varphi \end{cases}$$

Posons $X = \left(\begin{smallmatrix}\varphi\\ \omega\end{smallmatrix}\right)$. Nous avons alors

$$\dot X = AX \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } X(0) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) La solution générale du système est

$$X(t) = \exp(tA)C,\ C \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}).$$

Pour calculer $\exp(tA)$, nous commençons par calculer les valeurs propres de A ainsi que des générateurs des espace propres associés :

In[82]:=
```
Clear["Global`*"]
a = {{0, 1}, {-g/l, 0}};
t0 = 0;
x0 = {Pi/6, 0};
{l1, l2} = Eigenvalues[a] (*valeurs propres*)
{v1, v2} = Eigenvectors[a] (*vecteurs propres*)
```

Out[82]= $\left\{-\frac{i\sqrt{g}}{\sqrt{l}}, \frac{i\sqrt{g}}{\sqrt{l}}\right\}$

Out[83]= $\left\{\left\{\frac{i\sqrt{l}}{\sqrt{g}}, 1\right\}, \left\{-\frac{i\sqrt{l}}{\sqrt{g}}, 1\right\}\right\}$

Nous définissons la matrice de changement de base :

In[84]:=
```
p = Transpose[{v1, v2}];
MatrixForm[a]
```

Out[84]= $\begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{l}}{\sqrt{g}} & -\frac{i\sqrt{l}}{\sqrt{g}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nous pouvons alors calculer $\exp(tA)$ et la solution générale du système :

In[85]:=
```
xApprox[t_] := p.{{E^(t l1), 0}, {0, E^(t l2)}}.
   Inverse[p].{c1, c2}
xApprox[t]
```

Out[85]= $\left\{\mathrm{c1}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{i\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}} + \frac{1}{2}e^{\frac{i\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}}\right) + \mathrm{c2}\left(\frac{i\sqrt{l}e^{-\frac{i\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}}}{2\sqrt{g}} - \frac{i\sqrt{l}e^{\frac{i\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}}}{2\sqrt{g}}\right),\ \mathrm{c1}\left(\frac{i\sqrt{g}e^{\frac{i\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}}}{2\sqrt{l}} - \frac{i\sqrt{g}e^{-\frac{i\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}}}{2\sqrt{l}}\right) + \mathrm{c2}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{i\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}} + \frac{1}{2}e^{\frac{i\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}}\right)\right\}$

Nous déterminons les constantes telles que la condition initiale soit satisfaite :

In[86]:=
```
const = Solve[xApprox[t0] == x0, {c1, c2}]
```

Out[86]= $\left\{\left\{\mathrm{c1} \to \frac{\pi}{6}, \mathrm{c2} \to 0\right\}\right\}$

Ce n'est pas la solution du système qui nous intéresse mais uniquement la fonction φ. Calculons-là avec les constantes trouvées :

In[87]:=
```
phiApprox[t_] := xApprox[t][[1]] /. const[[1]]
phiApprox[t]
```

Out[87]= $\frac{1}{6}\pi\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{i\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}} + \frac{1}{2}e^{\frac{i\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}}\right)$

Comme le résultat doit être une fonction réelle, nous demandons à Mathematica de réduire cette expression :

In[88]:=
```
FullSimplify[
  phiApprox[t],
  Assumptions ->
    {Element[g, Reals], Element[l, Reals]}
]
```

Out[88]= $\frac{1}{6}\pi\cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$

La solution de l'équation différentielle d'ordre 2 avec condition initiale obtenue avec l'approximation $\sin(\varphi) \approx \varphi$ est donc

$$\varphi_{\text{approx}}(t) = \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\ t\right).$$

(c) Sans l'approximation $\sin(\varphi) \approx \varphi$, nous avons un système d'équations différentielles non-linéaire :

$$\begin{cases} \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l}\sin(\varphi) \end{cases}$$

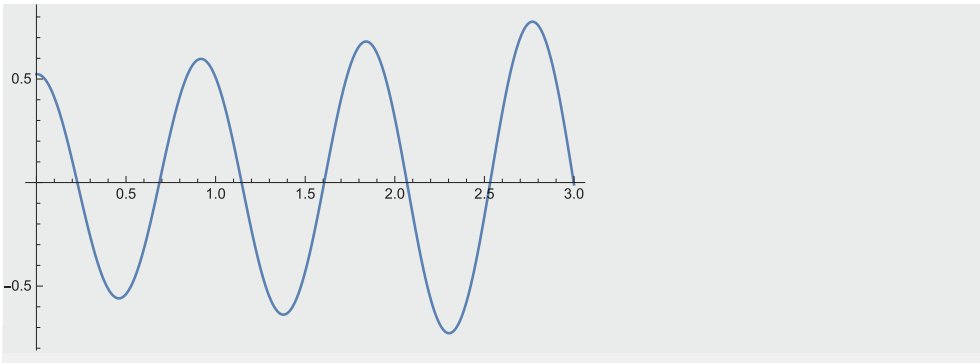
Commençons par définir les valeurs des différentes constantes :

In[89]:=
```
m = 0.1;
l = 0.2;
g = 9.81;
tmax = 3;
```

(i)

In[90]:=
```
n = 500; (*nombre de pas*)
dt = (tmax - t0)/n ; (*longueur du pas*)
b[{j_, w_}] := {w, -g/l Sin[j]}
  (*champ vectoriel*)
new[x_] := x + b[x]*dt
  (*calcul du point suivant*)
ptsEuler = NestList[new, x0, n];
  (*liste des points (j;w)*)
ptsphiEuler = Table[
   {k dt, ptsEuler[[k + 1, 1]]},
   {k, 0, n}
]; (*liste des points (t;j)*)
grapheEuler = ListPlot[
  ptsphiEuler, Joined -> True
]
```

Out[90]=



Le graphe produit par la méthode de Euler n'est pas périodique : l'amplitude augmente. Pour une meilleurs approximation de la solution, il faudrait augmenter le nombre de pas !

(ii)

In[91]:=
```
NDSolve[
  {
    j''[t] == -g/l  Sin[j[t]],
    {j[0], j'[0]} == x0
  },
  j, {t, t0, tmax}
]
```

Out[91]=
```
{{j→InterpolatingFunction[□]}}
```

Remarquons ici que Mathematica ne tolère pas l'utilisation de `phi` comme nom de variable.

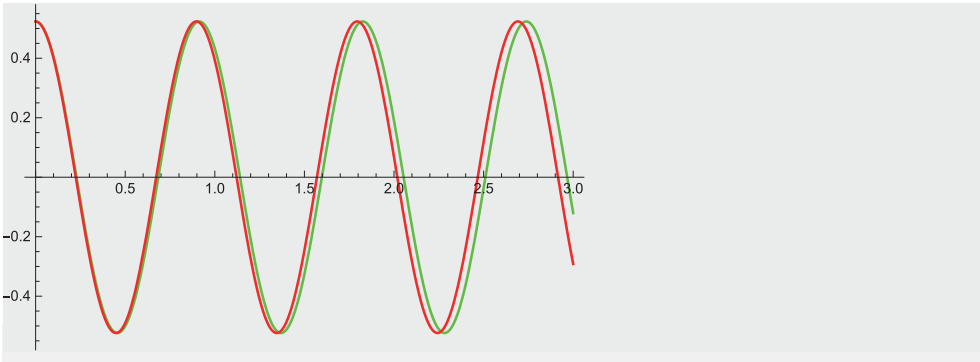
In[92]:=
```
phiMathica = j /. %[[1]]
```

Out[92]=
```
InterpolatingFunction[□]
```

Traçons le graphe de la solution obtenue avec l'approximation $\sin(\varphi) \approx \varphi$ (en rouge) ainsi que celui de le solution numérique du système sans cette approximation faite par Mathematica (en vert) :

In[93]:=
```
grapheApprox = Plot[
  {phiMathica[t], phiApprox[t]},
  {t, t0, tmax},
  PlotStyle -> {Green, Red}
]
```

Out[93]=



La période du la fonction obtenue avec l'approximation des petits angles (graphe rouge) est légèrement plus courte que celle obtenue avec l'équation exacte : comme $|\ddot{\varphi}| = \frac{g}{l}|\sin(\varphi)| < |\varphi|$ la valeur absolue de la courbure est plus importante avec l'approximation des petits angles et donc l'oscillation est plus rapide.

Quantitativement, la visibilité de ce décalage s'explique par l'importante erreur de l'approximation $\sin(\varphi) \approx \varphi$ à certains moments du mouvement. En effet, cette approximation correspond à une erreur relative de presque 5% lorsque l'angle φ est maximal :

$$\frac{\pi}{6} = 0.5235\ldots \approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$$

Si nous réévaluons le cahier avec comme condition initiale $\varphi(0) = \frac{\pi}{10}$, la différence est nettement moins visible :