§ 2 Interpolation orthogonale

Pour résoudre un problème d'interpolation, il est possible de choisir différentes familles de fonctions de base. Ce choix dépend des contraintes que l'on se pose, par exemple, en exigeant que l'interpolant soit périodique. Une contrainte intervenant dans les choix des fonctions des base est aussi la complexité des calculs découlant de ce choix. Nous avons vu qu'il pouvait être dans certain cas relativement aisé de calculé l'interpolant (cf. exercices 1-3 et 1-6). Le but de cette section est de passer en revue quelques cas où la résolution est des plus simple.

§ 2.1 Interpolation diagonale, interpolation de Lagrange

Nous allons considérer dans cette sous-section le cas de l'interpolation polynomiale. Nous verrons que la base de Lagrange est une liste de fonctions de base qui est construite de manière à réaliser une **interpolation diagonale**, c'est-à-dire une interpolation amenant à résoudre un système d'équations linéaires dont la matrice est diagonale. Nous verrons ensuite comment construire cette base.

Exemple introductif

Déterminer le polynôme de degré ≤ 2 qui passe par les 3 points

$P_0\,(1;\ 3)$, $P_1\,(2;\ 5)$, $P_2\,(3;\ -1)$.

Première méthode: Choisissons les fonctions de base $\{1,\ t,\ t^2\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice du système linéaire est pleine et la résolution demande beaucoup de calculs.

$$g\,(t) = -7 + 14\,t - 4\,t^2$$

Deuxième méthode: En nous inspirant de l'exercice 1-3, choisissons mieux les polynômes de base $\{1,\ t-1,\ (t-1)\,(t-2)\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre est triangulaire, ce qui diminue de beaucoup le temps de calcul.

$$g\,(t) = 3 + 2\,(t-1) - 4\,(t-1)\,(t-2)$$

Troisième méthode: Choisissons plus adroitement encore les fonctions de base $\{(t-2)\,(t-3),\ (t-1)\,(t-3),\ (t-1)\,(t-2)\}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations est diagonal.
Le travail de résolution du système est réduit à peu de chose.

$$g\,(t) = \frac{3}{2}\,(t-2)\,(t-3) + \frac{5}{-1}\,(t-1)\,(t-3) + \frac{-1}{2}\,(t-1)\,(t-2)$$

Quatrième méthode: Choisissons les fonctions de base suivantes appelées *base de Lagrange* $\left\{\frac{(t-2)\,(t-3)}{(1-2)\,(1-3)},\ \frac{(t-1)\,(t-3)}{(2-1)\,(2-3)},\ \frac{(t-1)\,(t-2)}{(3-1)\,(3-2)}\right\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice du système d'équations est la matrice identité.
Les coefficients cherchés sont les ordonnées des points donnés.

$$g\,(t) = 3\,\frac{(t-2)\,(t-3)}{(1-2)\,(1-3)} + 5\,\frac{(t-1)\,(t-3)}{(2-1)\,(2-3)} + (-1)\,\frac{(t-1)\,(t-2)}{(3-1)\,(3-2)}$$

Définition de la base de Lagrange

Soit $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$ des nombres réels distincts. La **base de Lagrange** correspondant à ces n nombres est formées des n fonctions suivantes :

$$L_0(t) = \frac{(t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})},$$

$$L_1(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_2)\ldots(t-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})},$$

$$L_2(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_3)\ldots(t-x_{n-1})}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{n-1})},$$

...

$$L_{n-1}(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1)\ldots(t-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}.$$

Au <u>numérateur</u>, il y a exactement $(n-1)$ facteurs du premier degré;

dans L_0, le facteur $(t-x_0)$ n'apparaît pas;
dans L_1, le facteur $(t-x_1)$ n'apparaît pas;
...
dans L_{n-1}, le facteur $(t-x_{n-1})$ n'apparaît pas;

Dans L_0, pour $t = x_0$, le dénominateur est égal au numérateur et ainsi $L_0(x_0) = 1$;
Dans L_1, pour $t = x_1$, le dénominateur est égal au numérateur et ainsi $L_1(x_1) = 1$;
...
Dans L_{n-1}, pour $t = x_{n-1}$, le dénominateur est égal au numérateur et ainsi $L_{n-1}(x_{n-1}) = 1$.

Nous avons la formule générale suivante : $L_i(t) = \dfrac{\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1}(t-x_k)}{\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1}(x_i-x_k)}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

- **Propriétés de la base de Lagrange**

Les polynômes de Lagrange sont des polynômes de degré $(n-1)$ tels que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Pour une preuve, voir l'exercice 2- 2

- **Solution du problème d'interpolation exprimée avec la base de Lagrange**

Si les ordonnées d'interpolation son $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, alors la base de Lagrange permet alors d'écrire explicitement et sans calcul la solution du problème d'interpolation :

$g(t) = y_0 L_0(t) + y_1 L_1(t) + \ldots + y_{n-1} L_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_i L_i(t)$

Pour une preuve, voir l'exercice 2- 2

§ 2.2 Interpolation orthogonale

- **Cas général [facultatif]**

Nous considérons un problème d'interpolation et utilisons les notations de la sous-section 1.5. Les vecteurs-colonnes de la matrice du système linéaire à résoudre sont

$$\vec{e_0} = \begin{pmatrix} b_0(x_0) \\ b_0(x_1) \\ \ldots \\ b_0(x_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} b_1(x_0) \\ b_1(x_1) \\ \ldots \\ b_1(x_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e_{n-1}} = \begin{pmatrix} b_{n-1}(x_0) \\ b_{n-1}(x_1) \\ \ldots \\ b_{n-1}(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

L'interpolation est dite **orthogonale** si et seulement si la matrice du système linéaire est orthogonale, c'est-à-dire si les vecteurs-colonnes sont orthogonaux deux à deux:

$$\vec{e_j} \bullet \vec{e_k} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k$$

Nous allons voir que si l'interpolation est orthogonale alors l'équation vectorielle

$$c_0 \vec{e_0} + c_1 \vec{e_1} + \ldots + c_{n-1} \vec{e_{n-1}} = \vec{y}$$

de notre problème d'interpolation peut être résolue avec peu de calculs. Nous effectuons le produit scalaire avec

$\vec{e_k}$ des membres de gauche et droite de cette équation et nous obtenons les équations équivalentes suivantes :

$$\left(c_0\,\vec{e_0} + c_1\,\vec{e_1} + \ldots + c_{n-1}\,\vec{e_{n-1}}\right) \bullet \vec{e_k} = \vec{y} \bullet \vec{e_k},$$

$$c_0\,\vec{e_0} \bullet \vec{e_k} + c_1\,\vec{e_1} \bullet \vec{e_k} + \ldots + c_{n-1}\,\vec{e_{n-1}} \bullet \vec{e_k} = \vec{y} \bullet \vec{e_k},$$

$$c_k\,\vec{e_k} \bullet \vec{e_k} = \vec{y} \bullet \vec{e_k}.$$

Nous pouvons donc écrire explicitement la solution

$$\boxed{c_k = \frac{\vec{y} \bullet \vec{e_k}}{\vec{e_k} \bullet \vec{e_k}}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.}$$

Proposition

Toute interpolation diagonale est orthogonale.
En particulier, la base de Lagrange est orthogonale.

Démonstration

Dans une matrice diagonale, les vecteurs-colonnes sont orthogonaux. Pour le comprendre, prenons un exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Réciproque

L'exemple traité dans l'exercice 2-6 prouve qu'il existe des problèmes d'interpolation dont la matrice est orthogonale mais pas diagonale.

- **Interpolation trigonométrique orthogonale**

Considérons un problème d'interpolation dont les n abscisses sont réparties uniformément sur un intervalle $[0,\ T]$; plus précisément, nous avons

$$x_j = j\,\frac{T}{n}, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

- **Fonctions de base pour l'interpolation trigonométrique**

Nous vonlons avoir un interpolant T-périodique. Pour cela, nous posons $\omega = \frac{2\pi}{T}$, choisissons les n fonctions de base suivantes ;

$$\begin{aligned}
&b_0(t) = 1,\\
&b_1(t) = \cos(\omega t),\ b_2(t) = \sin(\omega t),\\
&b_3(t) = \cos(2\omega t),\ b_4(t) = \sin(2\omega t),\\
&b_5(t) = \cos(3\omega t),\ b_6(t) = \sin(3\omega t),\\
&b_7(t) = \cos(4\omega t),\ \ldots,\\
&b_{n-1}(t) = \cdots
\end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$b_0(t) = 1, \quad b_k(t) = \begin{cases} \cos\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\omega t\right) & \text{si } k \text{ est impair} \\ \sin\left(\frac{k}{2}\,\omega t\right) & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

Théorème

Avec les choix précédents, l'interpolation trigonométrique est orthogonale. Plus précisément, avec les notations du la sous-section 1.5,

$$\vec{e_j} \bullet \vec{e_k} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k \quad \text{et}$$

si n est impair : $\quad \vec{e_k} \bullet \vec{e_k} = \begin{cases} n & \text{pour } k = 0 \\ \frac{n}{2} & \text{pour } k = 1,\ \ldots,\ n-1 \end{cases}$

si n est pair : $\quad \vec{e_k} \bullet \vec{e_k} = \begin{cases} n & \text{pour } k \in \{0,\ n-1\} \\ \frac{n}{2} & \text{pour } k = 1,\ \ldots,\ n-2 \end{cases}$

Démonstration

Ce théorème sera démontré dans le cadre du chapitre sur les nombres complexes. Il sera par contre vérifié pour des cas particuliers dans l'exercice 2-7.

Corollaire

La fonction

$$g(t) = c_0\, b_0(t) + c_1\, b_1(t) + \ldots + c_{n-1}\, b_{n-1}(t)$$

dont les coefficients

$$c_k = \frac{\vec{y} \bullet \vec{e_k}}{\vec{e_k} \bullet \vec{e_k}}\ , \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

sont appelés **coefficients de Fourier**, est périodique de période T et passe par les n points prescrits

$$g(x_0) = y_0,\ g(x_1) = y_1,\ \ldots,\ g(x_{n-1}) = y_{n-1}\ .$$

- **La famille orthogonale des fonctions de base [facultatif]**

A propos de l'interpolation orthogonale, les mathématiciens disent que les fonctions de base forment une famille orthogonale. Pour le justifier, ils munissent l'espace vectoriel des fonctions d'interpolation

$$g = c_0\, b_0 + c_1\, b_1 + \ldots + c_{n-1}\, b_{n-1}$$

du produit scalaire suivant

$$\langle f \mid g \rangle = f(x_0)\, g(x_0) + f(x_1)\, g(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\, g(x_{n-1})$$

par rapport auquel les fonctions de base sont orthogonales. En effet, pour $j \neq k$,

$$\langle b_j \mid b_k \rangle = b_j(x_0)\, b_k(x_0) + b_j(x_1)\, b_k(x_1) + \ldots + b_j(x_{n-1})\, b_k(x_{n-1}) =$$

$$\begin{pmatrix} b_j(x_0) \\ b_j(x_1) \\ \ldots \\ b_j(x_{n-1}) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_k(x_0) \\ b_k(x_1) \\ \ldots \\ b_k(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \vec{e_j} \bullet \vec{e_k} = 0$$

Les fonctions de base et les colonnes de la matrice d'interpolation sont en correspondance biunivoque; c'est pourquoi on peut attribuer aux b_j les propriétés que l'on observe sur les $\vec{e_j}$. Ainsi, l'interpolation est orthogonale si et seulement si les fonctions de base forment une famille orthogonale.

§ 2.3 Exercices

- **Exercice 2-1 [sans/avec *Mathematica*]**

Sans *Mathematica* déterminez le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui passe par les quatre points suivants

$M_0(-1,\ 2),\ M_1(1,\ -1),\ M_2(2,\ 3),\ M_3(5,\ -7)$

puis évaluez-le en 0. Vérifiez votre résultat *Mathematica.*

Prescription d'exercice : écrivez le polynôme cherché comme combinaison linéaire des polynômes de la base de Lagrange.

- **Exercice 2-2 [sans *Mathematica*]**

Dans un problème d'interpolation où les points sont $(x_0,\ y_0),\ (x_1,\ y_1),\ ,\ \ldots,\ (x_{n-1},\ y_{n-1})$ et les fonctions de base sont les polynômes de Lagrange $L_0,\ L_1,\ \ldots,\ L_{n-1}$, démontrez que

a) $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$;

b) la solution du problème est $g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\, L_k(t)$

■ **Exercice 2-3 [avec *Mathematica*]**

Soit $(-1; 2)$, $(3; 7)$, $(4; 1)$, $(5, -2)$ des points d'interpolation. Le but de cet exercice est de générer automatiquement la base de Lagrange ainsi que le polynôme d'interpolation correspondant à ces points. Pour cela, procédez en suivant les instruction suivantes :

a. Définissez une liste **pts** contenant les points d'interpolation puis générer automatiquement les listes **abs** et **ord** contenant les liste des abscisses et des ordonnées d'interpolation.

b. Générez une liste contenant les fonctions $t - x_0$, $t - x_1$, ..., $t - x_{n-1}$.

c. Construisez la fonction **n[i,t]** correspondant au numérateur de $L_{i-1}(t)$, le $(i-1)^{\text{ème}}$ polynôme de Lagrange : il s'agit de la multiplication de toutes les fonctions de la liste précendante sauf la $i^{\text{ème}}$. Pour cela, utiliser les fonctions **Apply**, **Delete** et **Times**.

d. Construisez la fonction **d[i]** correspondant au dénominateur de $L_{i-1}(t)$, le $(i-1)^{\text{ème}}$ polynôme de Lagrange, en procédant comme au point précédent.

e. En utilisant les fonctions **n** et **d** construisez la liste **b[t]** contenant les n polynômes de Lagrange.

f. Construisez **p[t]** le polynôme de Lagrange. Vérifiez votre résultat en traçant le graphe de p et en faisant figurer sur celui-ci les points d'interpolation.

■ **Exercice 2-4 [avec *Mathematica*]**

Pour $n = 7$ et les abscisses $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, faites les graphiques des 4 derniers éléments de la base de Lagrange L_3, L_4, L_5, L_6.

■ **Exercice 2-5 [sans *Mathematica*] [facultatif]**

Soit les abscisses d'intepolation

$x_0 = 0;\quad x_1 = 0.25;\quad x_2 = 0.5;\quad x_3 = 0.75;\quad x_4 = 1;$

dont les ordonnées correspondantes sont dénommées y_0, y_1, y_2, y_3, y_4. Nous considèrons la fonction d'interpolation <u>linéaire par morceaux</u> $g(t)$ qui passe par ces 5 points. Pour exprimer $g(t)$, nous voulons construire les 5 fonctions de base $b_0(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$, $b_4(t)$ qui sont affines par morceau et vérifient les conditions

pour $i = 0, \ldots, 4,\ b_i(x_i) = 1;$

pour $i \neq j,\ b_i(x_j) = 0$

a) Dessinez les 5 fonctions de base.

b) Ecrivez explicitement, au moyen d'une formule, chaque fonction de base.

c) Appliquez les formules au calcul de

$g(0.6) = y_0\, b_0(0.6) + y_1\, b_1(0.6) + y_2\, b_2(0.6) + y_3\, b_3(0.6) + y_4\, b_4(0.6)$

■ **Exercice 2-6 [avec *Mathematica*] [facultatif]**

Soit les points

$$P_0(0;0),\ P_1\left(\frac{2\pi}{3};-2\right) \text{ et } P_2\left(\frac{4\pi}{3};3\right)$$

Notons x_0, x_1 et x_2 les abscisses de chacun de ces points et y_0, y_1 et y_2 leurs ordonnées. Nous cherchons une fonction de 2π-période f dont le graphe passe par ces points et qui est une combinaison linéaire des fonctions de base suivantes :

$$b_0(t) = 1,\ ,\ b_1(t) = \cos(t) \text{ et } b_2(t) = \sin(t).$$

Nous cherchons donc des nombres c_0, c_1 et c_2 tels que le graphe de la fonction

$$f(t) = c_0\, b_0(t) + c_1\, b_1(t) + c_2\, b_2(t)$$

passe par P_0, P_1et P_2. Le but de cet exercice est de déterminer ces nombres en évitant d'avoir un système d'équations à résoudre. Pour ce faire, nous procédons de la façon suivante :

1. Définissez la variable **`pts`** contenant la liste des points d'interpolation et la fonction **`b[t]`** contenant la liste des fonctions de base.
2. Déterminez la matrice m du système d'équations linéaires à résoudre.
3. Soit $\vec{e_i}$ la discrétisation de la fonction b_i. Définissez la fonction **`e[i]`** retournant le vecteur $\vec{e_i}$ pour $i = 0, 1, 2$.
4. Montrez que $\vec{e_i} \bullet \vec{e_j} = 0$ pour $i \neq j$. Un problème d'interpolation amenant à une matrice ayant cette propriété est un problème d'**interpolation orthogonale**.
5. Ecrivez le système d'équations à résoudre sous forme d'une équation vectorielle faisant intervenir les vecteurs $\vec{e_0}$, $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$.
6. Calculez c_0, c_1 et c_2 en utilisant les résultats des deux points précédents.
7. Dans un même repère, placez les pointsP_0, P_1et P_2 ainsi que le graphe de f.

■ **Exercice 2-7 [avec *Mathematica*] [facultatif]**

Soit $T > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ impair. Nous considérons un problème d'interpolation dans lequel une fonction trigonométrique T-périodique est recherchée et dont les abscisses des points d'interpolations sont

$$x_j = j \cdot \frac{T}{n},\ \ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Nous voulons vérifier avec *Mathematica* pour différentes valeurs de n qu'un tel problème est une problème d'interpolation orthogonale. Pour cela, nous procédons de la façon suivante:

1. Définissez une variable **`n`** avec une valeur impaire.
2. Définissez la variable **`abs`** contenant la liste des abscisses d'interpolation et la fonction **`b[t]`** contenant la liste des fonctions de base.
3. Soit $\vec{e_i}$ la discrétisation de la fonction b_i. Définir la fonction **`e[i]`** retournant le vecteur $\vec{e_i}$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
4. Calculer les produits scalaires $\vec{e_i} \bullet \vec{e_j}$ pour pour $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Représenter les résultats dans une matrice qui sera réduite au maximum et en déduire que l'interpolation est orthogonale.

■ **Exercice 2-8 [avec *Mathematica*] [facultatif]**

Montrez que l'interpolation trigonométrique donnée en exemple dans la sous-section 1.4 (p. 8-10) n'est pas orthogonale.

Expliquez en quoi les hypothèses du théorème donné en p. 17 ne sont pas remplies.

■ **Exercice 2-9 [Avec *Mathematica*] [facultatif]**

Dans la région de Zurich, la température moyenne mensuelle en degrés Celsius est la suivante:

mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
temp [°C]	−1	1	4	8	12	15	18	17	14	9	4	1

a) Construisez une fonction d'interpolation pour ces températures (voir les indications ci-dessous).

b) Comparez
   1) la température moyenne annuelle et
   2) c_0 = le coefficient de la première fonction de base.
   Expliquez vos observations.

c) On veut diviser l'année en deux parties égales: une "saison froide" et une "saison chaude".
   Pour ce faire, calculez les dates auxquelles la température moyenne journalière est égale à la tempétature moyenne annuelle.
   Comparez avec les dates des équinoxes. Commentez les résultats obtenus.

Indications

1) Dans le choix des fonctions de base, prenez un cosinus du plus qu'un sinus.
2) Pour bénéficier de l'orthogonalité, nous choisissons des abscisses équidistantes :

$$\mathbf{x = Range\left[0,\ 360,\ \frac{365}{12}\right]}$$

$$\left\{0,\ \frac{365}{12},\ \frac{365}{6},\ \frac{365}{4},\ \frac{365}{3},\ \frac{1825}{12},\ \frac{365}{2},\ \frac{2555}{12},\ \frac{730}{3},\ \frac{1095}{4},\ \frac{1825}{6},\ \frac{4015}{12}\right\}$$

ce qui nous donne les points d'interpolation suivants

t [d]	0	$\frac{365}{12}$	$\frac{365}{6}$	$\frac{365}{4}$	$\frac{365}{3}$	$\frac{1825}{12}$	$\frac{365}{2}$	$\frac{2555}{12}$	$\frac{730}{3}$	$\frac{1095}{4}$	$\frac{1825}{6}$	$\frac{4015}{12}$
y [°C]	−1	1	4	8	12	15	18	17	14	9	4	1

3) Pour interpréter les résultats du calcul, nous nous réfèrons au tableau suivant :

t [d]	date
0	16 janvier
30	15 février
61	18 mars
91	17 avril
122	18 mai
152	17 juin
182	17 juillet
213	17 août
243	16 septembre
274	17 octobre
304	16 novembre
335	17 décembre

■ **Exercice 2-10 [Avec *Mathematica*] [facultatif]**

Vérifiez que la fonction

$$f(t) = 3\cos^4(t) - 5\sin^3(t)$$

peut être mise sous la forme

$$f(t) = c_0 + c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + c_3\cos(2t) + c_4\sin(2t) + c_5\cos(3t) + c_6\sin(3t) + c_7\cos(4t) + c_8\sin(4t)$$

Indications

1) Echantillonnez la fonction $f(t)$ en 9 points équidistants.
2) Posez le problème d'interpolation avec les fonctions de base adéquates
   Vérifiez que la matrice d'interpolation est orthogonale.
   Calculez les coefficients.
3) En notant $g(t)$ la fonction d'interpolation, vérifiez que $g(t) - f(t) = 0$ pour tout t.

■ Prolongements

Le lecteur intéressé est invité à comparer le thème de l'*interpolation trigonomérique* à celui de l'*ajustement trigonométrique au sens des moindres carrés.* Pour ce faire, sur le site http://www.collegedusud.ch/app/ap-plmaths/
suivez les liens **Supports de cours / Projections et ajustements § 3 Ajustements au sens des moindres carrés.**