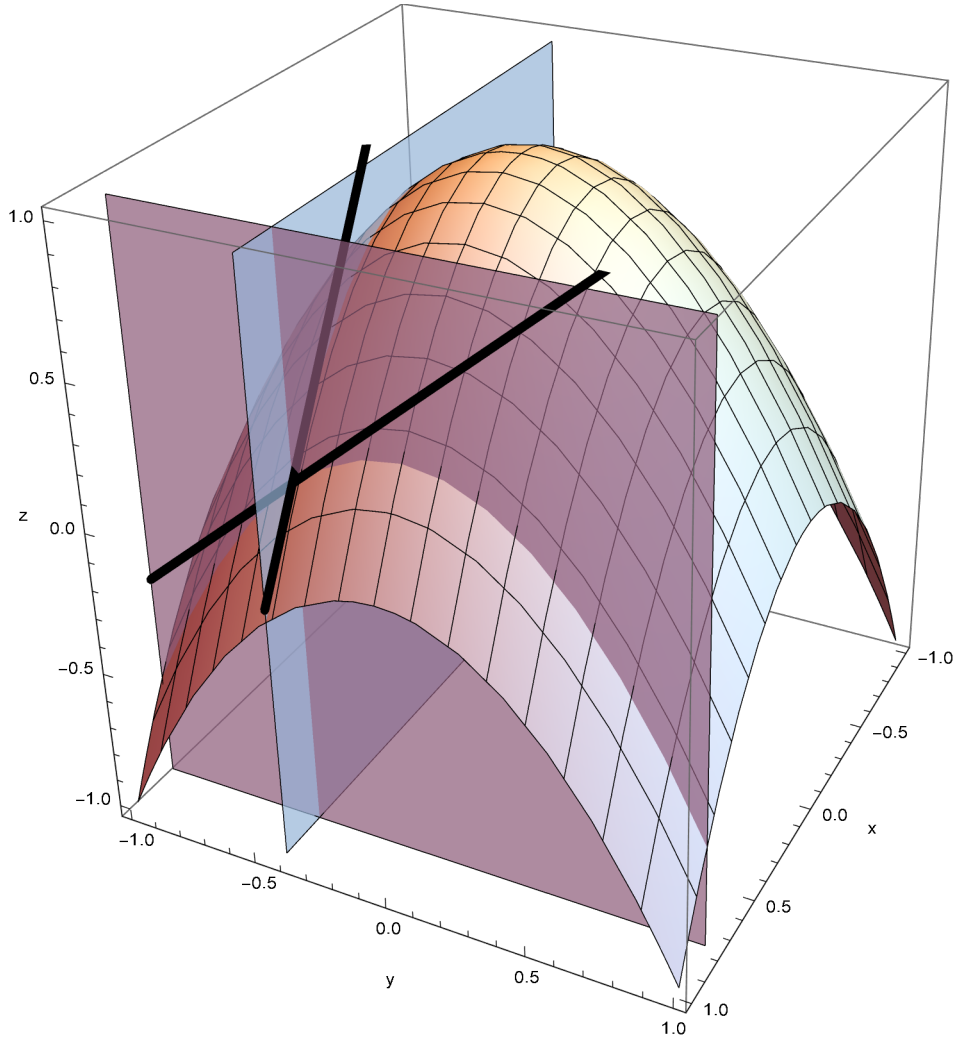
Collège du Sud, Bulle
3e - 4e année , OS PAM

Applications des mathématiques

Fonctions de plusieurs variables



Édition 2023
http://applmaths.collegedusud.ch

§1 Formule de Taylor à une variable

Nous allons voir dans cette section comment approximer une fonction d'*une* variable à l'aide d'un polynôme, le polynôme de Taylor, et nous estimerons l'erreur ainsi faite. Nous verrons ensuite comment calculer ce polynôme à l'aide de Mathematica et finalement nous généraliserons le critère de la dérivée seconde pour déterminer la nature d'un point critique d'une fonction réelle d'une variable, ceci en travaillant avec l'erreur d'approximation faite par le polynôme de Taylor.

1.1 Formule de Taylor

Théorème et définition

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable et soit $a \in I$. Pour tout $b \in I \setminus \{a\}$, il existe un nombre c strictement compris entre a et b tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Cette formule est la **formule de Taylor de degré *n* de *f* en *a*** et le polynôme

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

est le **polynôme (ou développement) de Taylor de degré *n* de *f* en *a*** tandis que $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ est son **reste.**

Démonstration

Soit $b \in I \setminus \{a\}$. Les valeurs $f(b), f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ sont déterminées et donc connues à partir de f. Soit alors le nombre A déterminé par l'égalité

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{A}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \quad (*)$$

Il faut montrer qu'il existe un nombre c strictement compris entre a et b tel que $A = f^{(n+1)}(c)$. Utilisons la fonction auxiliaire $g(x)$ définie comme suit:

$$g(x) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(b-x)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1} - f(b).$$

La fonction g est dérivable et possède en plus les propriétés suivantes:

- $g(b) = f(b) + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 - f(b) = 0$
- $g(a) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{A}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} - f(b) \underset{(*)}{=} f(b) - f(b) = 0$

Calculons $g'(x)$:

$$
\begin{aligned}
g'(x) = & f'(x) \\
& + f''(x)(b-x) - f'(x) \\
& + \frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f''(x)}{2!} \cdot 2(b-x) \\
& + \frac{f^{(4)}(x)}{3!}(b-x)^2 - \frac{f'''(x)}{3!} \cdot 3(b-x)^2 \\
& + - \ldots \\
& + \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \cdot n(b-x)^{n-1} \\
& - \frac{A}{(n+1)!}(n+1)(b-x)^n.
\end{aligned}
$$

Après simplification, nous obtenons :

$$g'(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{A}{n!}(b-x)^n$$

La fonction g étant une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, le théorème de Rolle garantit qu'il existe un nombre c strictement compris entre a et b tel que $g'(c) = 0$. Pour un tel nombre c, nous avons donc

$$0 = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n - \frac{A}{n!}(b-c)^n$$

Comme c est strictement compris entre a et b, $b - c$ est non nul et l'équation ci-dessus est équivalente à

$$A = f^{(n+1)}(c).$$

Le nombre c trouvé grâce au théorème de Rolle a donc la propriété voulue. ■

Remarques

- S'il existe un nombre M tel que $\left| f^{(n+1)}(x) \right| < M$ pour tout $x \in I$, nous avons $| f(x) - p_n(x) | < \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. L'approximation de $f(x)$ par $p_n(x)$ est donc d'autant meilleure que $\frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ est petit.
- Lorsqu'une formule explicite du reste n'est pas nécessaire, plutôt que d'écrire $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1}$, il est possible de noter uniquement $r_n(x) = O\left((x-a)^{n+1}\right)$. Cette notation est due à Landau et se lit "grand O de $(x-a)^{n+1}$". Avec cette notation , nous avons alors $f(x) = p_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right)$. Plus précisément, cette notation cela signifie qu'il existe des nombres $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout x avec $| x - a | < \delta$ nous avons $\left| f(x) - p_n(x) \right| \leq M(x-a)^{n+1}$ ce qui implique que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^k} = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$. Cela signifie donc que $f(x) - p_n(x)$ tend vers 0 plus rapidement que $(x-a)^n$ lorsque x tend vers a (nous notons $\underset{x \to a}{O}\left((x-a)^{n+1}\right)$ si cette clarification est nécessaire). Nous verrons que cette notation est très utile pour lever des indéterminations dans des calculs de limite en un point. En particulier, nous avons la propriété suivante :

  Si $f(x) = g(x)(x-a)^n + O\left((x-a)^{n+1}\right)$ alors $f(x) = (x-a)^n\,(g(x) + O(x-a))$.
- Dans le cas où le développement de Taylor se fait en $a = 0$, nous obtenons la **formule de MacLaurin**

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}$$

où c est un nombre strictement compris entre 0 et x.

Exemple

Nous voulons approximer $\sqrt[3]{7}$ sans utiliser de calculatrice. Pour cela, nous calculons p_2, le polynôme de Taylor de degré 2 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en 8 (nous choisissons 8 car c'est le cube parfait le plus proche de 7). Nous avons

$$p_2(x) = f(8) + f'(8)\,(x-8) + \frac{f''(8)}{2}\,(x-8)^2\,.$$

Calculons les différents coefficients:

- $f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$
- $f'(8) = \frac{1}{3}\,x^{-2/3}\,|_{x=8} = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}\,|_{x=8} = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$
- $f''(8) = \frac{1}{3}\,\frac{-2}{3}\,x^{-5/3}\,|_{x=8} = -\frac{2}{9\,\sqrt[3]{x^5}}\,|_{x=8} = -\frac{2}{9\,\sqrt[3]{8^5}} = -\frac{1}{144}$

Nous avons donc

$$p_2(x) = 2 + \frac{1}{12}\,(x-8) - \frac{1}{288}\,(x-8)^2 \text{ et } f(x) = p_2(x) + O\big((x-8)^3\big).$$

Nous pouvons maintenant estimer $\sqrt[3]{7}$:

$$\sqrt[3]{7} \approx p_2(7) = 2 + \frac{1}{12}\,(-1) + \frac{1}{288} = \frac{553}{288} \approx 1.92$$

Pour estimer l'erreur commise, nous calculons le reste

$$r_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}\,(x-8)^3 \text{ pour } c \in\ ]7;8[\,.$$

Nous avons $f'''(c) = \frac{1}{3}\,\frac{-2}{3}\,\frac{-5}{3}\,c^{-8/3} = \frac{-10}{27\,\sqrt[3]{c^8}}$. Comme $c \in]7;8[$, nous pouvons faire l'estimation grossière $|f'''(c)| < \left|\frac{-10}{27\,\sqrt[3]{1^8}}\right| = \frac{10}{27}$. Nous avons donc l'estimation suivante de l'erreur commise:

$$|\,r_3(x)\,| < \frac{\frac{10}{27}}{6}\,\left|(7-8)^3\right| = \frac{5}{81} \approx 0.06.$$

Faisons une estimation numérique de $\sqrt[3]{7}$ avec Mathematica afin de juger de la précision de nos estimations:

```
7^(1/3) // N
1.91293
```

Nous constatons que l'erreur commise pour approximer $\sqrt[3]{7}$ à l'aide du polynôme de Taylor de degré 2 en 8 n'est que de 0.01 alors que l'avions estimé à 0.06. La raison de cette surestimation est la surestimation de $f'''(c)$ pour $c \in]7;8[$ due à la nécessité d'utiliser un nombre inférieure à 8 dont nous savions calculer la racine cubique sans calculatrice.

1.2 Calculs avec Mathematica

Calcul d'une dérivée

Le calcul de la dérivée d'une fonction d'une seule variable se fait dans Mathematica en utilisant la

notation usuelle:

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := Sqrt[x]
f'[x]
f'[9]
f'''[x]
```

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{8\,x^{5/2}}$$

Si la fonction dépend de plusieurs variables, cette notation ne va pas être utilisable car Mathematica ne saura pas par rapport à quel variable il faut dériver:

```
eCin[m_, v_] := 1/2 m v^2
eCin'[m, v]
```

eCin′[m, v]

Dans une telle situation, le calcul des dérivées se fait dans Mathematica avec la fonction **D**. Pour calculer de la dérivée première, la syntaxe est **D[f,x]**, où **f** est l'expression algébrique de la fonction que l'on veut dériver et **x** la variable par rapport à laquelle nous dérivons.

```
D[eCin[m, v], v]
```

m v

La fonction **D** est aussi avantageuse si nous désirons dériver plusieurs fois une fonction. La syntaxe est **D[f,{x,n}]**. Appliquons cela à la fonction **f** défini précédemment:

```
D[f[x], {x, 4}] (* dérivée quatrième *)
```

$$-\frac{15}{16\,x^{7/2}}$$

Par contre, si nous désirons évaluer la dérivée, il faut travailler avec les règles de remplacement. Pour illustrer cela, évaluons la dérivée quatrième de *f* en 1 :

```
D[f[x], {x, 4}] /. {x → 1}
```

$$-\frac{15}{16}$$

Pour définir la fonction donnant la dérivée quatrième, il faut aussi passer par les règles de remplacements :

```
f4[x_] := D[f[a], {a, 4}] /. {a → x}
f4[1]
```

$$-\frac{15}{16}$$

En effet, si nous définissons **ff4[x_]:=D[f[x],{x,4}]** puis évaluons **ff4[1]**, nous obtenons une

erreur car Mathematica cherche à évaluer `D[f[1],{1,4}]` et 1 n'est pas une variable :

```
ff4[x_] := D[f[x], {x, 4}]
ff4[1]
```

General: 1 is not a valid variable.

$\partial_{\{1,4\}} 1$

Les calculs de dérivées peuvent aussi se faire en utilisant le symbole $\partial_{\square}\square$ de la palette (raccourci clavier ESC pd ESC CTRL [-]) où figure en indice la variable par rapport à laquelle nous dérivons :

```
∂v (eCin[m, v])
```

m v

Développement de Taylor

Les développements de Taylor (ou développements en série) se font dans Mathematica à l'aide de la fonction `Series[f,{x,x0,n}]`, où `f` est l'expression algébrique de la fonction que l'on veut développer, `x` la variable de cette fonction, `x0` le nombre où se fait le développement et `n` est le degré du polynôme de Taylor.

Pour illustrer ceci, calculons $p(x)$, le polynôme de Taylor de degré 4 de f en 1 :

```
Series[f[x], {x, 1, 4}]
```

$$1+\frac{x-1}{2}-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3-\frac{5}{128}(x-1)^4+O[x-1]^5$$

Pour avoir uniquement le polynôme de Taylor, nous utilisons la fonction `Normal` :

```
Series[f[x], {x, 1, 4}] // Normal
```

$$1+\frac{1}{2}(-1+x)-\frac{1}{8}(-1+x)^2+\frac{1}{16}(-1+x)^3-\frac{5}{128}(-1+x)^4$$

Pour définir la fonction correspondant au polynôme de Taylor nous devons aussi travailler avec une règle de remplacement (raisons analogues au cas de la fonction dérivée) :

```
p[x_] := (Series[f[a], {a, 1, 4}] // Normal) /. {a → x}
p[x]
```

$$1+\frac{1}{2}(-1+x)-\frac{1}{8}(-1+x)^2+\frac{1}{16}(-1+x)^3-\frac{5}{128}(-1+x)^4$$

```
p[1.5] (* approximation de f en 1.5 par un polynôme de degré 4 *)
f[1.5] (* valeur exacte de f en 1.5 *)
```

1.22412

1.22474

Exercice 1 [sans Mathematica]

Calculer la formule de Taylor de degré n de f en a dans chacun de cas ci-dessous. Donner la réponse en utilisant la notation de Landau.

a) $f(x) = \ln(x),\ a = 1,\ n = 5$

b) $f(x) = \tan(x),\ a = 0,\ n = 3$

c) $f(x) = \frac{1}{1+e^{x+2}},\ a = -2,\ n = 3$

Exercice 2 [sans Mathematica]

Soit la fonction $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

a) Calculer le polynôme de Taylor de degré 3 de $f(x) = \sqrt[4]{x}$ en 16.

b) Estimer $\sqrt[4]{17}$ avec ce polynôme et calculer l'erreur absolue ainsi commise.

Exercice 3 [sans Mathematica]

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

a) Trouver une formule pour $f^{(k)}(x),\ k \in \mathbb{N}$, et démontrez-là par récurrence sur k.

b) Calculer le terme de degré k du développement de MacLaurin de f.

c) Déterminer le développement de MacLaurin de degré n de f.

Exercice 4 [sans Mathematica]

Dans l'ouvrage *Mécanique* de J.-A. Monard, nous trouvons à la page 216 l'expression de la masse relativiste

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots\right),$$

où $\beta = \frac{v}{c}$, c étant la vitesse de la lumière.

Justifier le résultat proposé en utilisant un développement en série de MacLaurin.

Exercice 5 [sans/avec Mathematica]

Calculer la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x - \sin(x)}$...

a) ...à l'aide d'un développement de MacLaurin du numérateur et du dénominateur.

b) ...avec Mathematica.

Exercice 6 [sans Mathematica]

Résoudre dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ en utilisant le développement de MacLaurin de degré 2 du cosinus et comparer le résultat avec la solution exacte.

Exercice 7 [sans Mathematica]

Soit la fonction $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, et un nombre $a \in \mathbb{R}$

a) Calculer le développement de Taylor de degré n de f en a.

b) En déduire la formule du binôme de Newton en évaluant ce développement en $a + b$.

Exercice 8 [sans Mathematica]

On veut utiliser le développement MacLaurin de $y = e^x$ afin d'approximer le nombre de Euler.

a) Sans calculatrice, déterminer le degré du polynôme de Taylor permettant d'approximer e avec une erreur inférieure à 0.001.

b) Vérifier votre résultat à l'aide de la calculatrice.

Exercice 9 [avec Mathematica]

Soit la fonction $f(x) = 4 \cdot \arctan(x)$.

a) Calculer le développement de MacLaurin de degré 20 de f.

b) Utiliser le résultat précédent pour estimer π puis calculer l'erreur relative de cette approximation.

Exercice 10 [sans/avec Mathematica]

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [3; 5]$.

a) Sans Mathematica, donner et démontrer une formule pour $f^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Sans Mathematica, calculer le développement de Taylor de degré n de f en $a = 4$, puis vérifier avec Mathematica dans le cas $n = 4$.

c) Sans Mathematica, donner une estimation de l'erreur maximale commise lors de l'approximation de f par ce développement, puis vérifier avec Mathematica dans le cas $n = 4$ pour l'approximation de $\sqrt{5}$.

1.3 Recherche d'extrema à l'aide de la formule de Taylor

Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$.

Si f est dérivable dans un voisinage de a, la condition $f'(a) = 0$ est nécessaire pour que f possède un extremum local en $x = a$. Cette condition n'est cependant pas suffisante. Si f est deux fois continûment dérivable (ce qui signifie que toutes les dérivées sont continues), nous pouvons alors utiliser le critère de la dérivée seconde. On a:

- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f possède un minimum en $x = a$
- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f possède un maximum en $x = a$

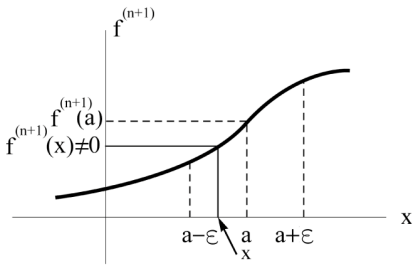
Question

Qu'en est-il si f est $n + 1$ fois continûment dérivable sur I avec $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$ et $f^{(n+1)}(a) \neq 0$?

D'après la formule de Taylor, pour tout $x \in I$, il existe un nombre c entre x et a tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{1}$$

Puisque $f^{(n+1)}(x)$ est continue et $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a-\epsilon; a+\epsilon[$.



Deux cas se présentent:

a) $f^{(n+1)}(a) < 0$ et alors $f^{(n+1)}(x) < 0$ pour tout $x \in]a-\epsilon; a+\epsilon[$

b) $f^{(n+1)}(a) > 0$ et alors $f^{(n+1)}(x) > 0$ pour tout $x \in]a-\epsilon; a+\epsilon[$

Distinguons les deux situations selon que n est pair ou impair. De (1) nous tirons

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{2}$$

Réponse si $n+1$ est pair

a) Si $f^{(n+1)}(a) < 0$, alors $f^{(n+1)}(x) < 0$ $\forall\, x \in]a-\epsilon; a+\epsilon[$ et

$f^{(n+1)}(c) < 0$

Puisque n est impair, $n+1$ est pair et $(x-a)^{n+1} > 0$ pour tout $x \neq a$, nous avons

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} < 0 \ \forall x \neq a.$$

De (2) nous tirons $\boxed{f(x) - f(a) < 0}$ $\forall\, x \in]a-\epsilon; a+\epsilon[$

En d'autres termes, f possède un **maximum local en $x = a$**.

b) Si $f^{(n+1)}(a) > 0$, alors $f^{(n+1)}(c) > 0$ et comme $n+1$ est pour nous avons

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} > 0 \ \forall x \neq a.$$

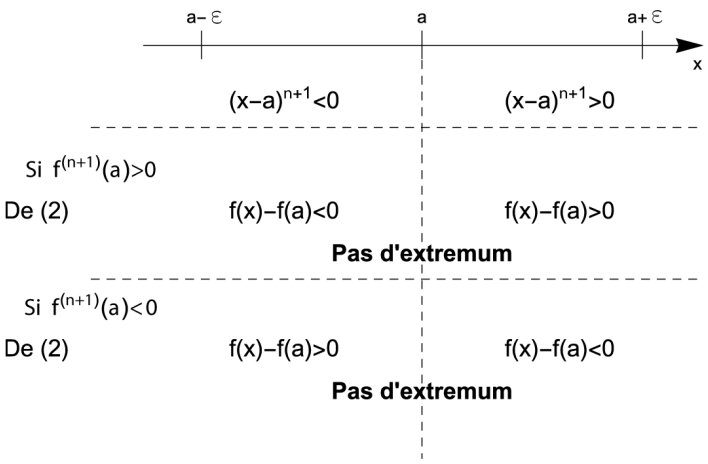
De (2) nous tirons $\boxed{f(x) - f(a) > 0}$ $\forall\, x \in]a-\epsilon; a+\epsilon[$

En d'autres termes, f possède un **minimum local en $x = a$**.

Remarquons que pour $n = 1$, nous retrouvons le critère de la dérivée seconde.

Réponse si $n+1$ est impair

Nous avons la situation suivante:



Exercice 11 [sans/avec Mathematica]

a) Déterminer pour quelles valeurs entières de n la fonction y=f(x)=x^n possède un extremum en utilisant le critère établi ci-dessus.

b) Illustrer la situation avec Mathematica en utilisant la fonction **`Manipulate`**.

Exercice 12 [sans Mathematica]

Déterminer l'extremum de la fonction $f(x) = x^4 - 8\,x^3 + 24\,x^2 - 32\,x + 12$ en utilisant le critère établi ci-dessus.

§2 Fonctions de deux variables

Dans cette section, nous étendrons les résultats d'analyse à une variable aux fonctions réelles de deux variables. Nous allons tout d'abord voir deux méthode permettant de représenter le comportement d'une fonction de deux variables : à l'aide de son graphe et à l'aide de ses lignes de niveau. Nous introduirons ensuite les notions de continuité (à l'aide des suites) et de dérivée d'ordre 1 et 2. Nous terminerons cette section en présentant les développements de Taylor d'ordre 1 et 2.

2.1 Représentations graphiques

Définitions

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Le **graphe** de f est l'ensemble des points $\{(x; y; f(x; y)) \mid (x; y) \in U\}$.

Le graphe d'une fonction de deux variables est donc un sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^3$. La troisième coordonnée d'un point de l'espace s'appelle la **cote** et se note généralement z. Pour cette raison, lorsqu'une fonction de deux variables est définie, nous notons parfois $z = f(x; y)$.

Le graphe d'une fonction de deux variables se fait dans Mathematica à l'aide de la fonction **`Plot3D`**.

Exemple 1 : volume du cylindre

r et h désignant respectivement le rayon et la hauteur d'un cylindre, le volume V a pour expression analytique $V = \pi r^2 h$.

L'ensemble de définition est le premier quadrant du plan

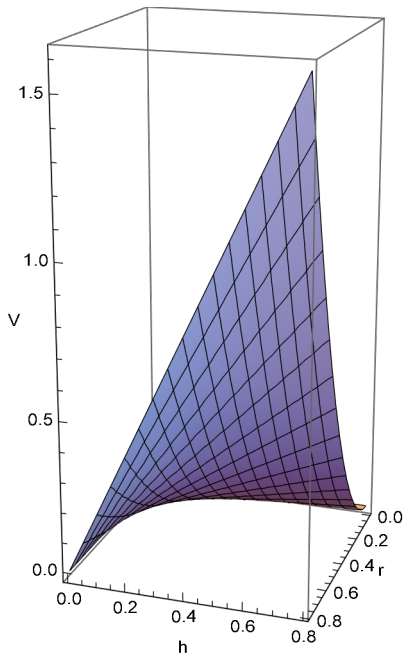
$D = \{(r;\ h) \mid r \geq 0 \text{ et } h \geq 0\}$

La fonction "volume du cylindre" associe à chaque paire (r, h) le nombre réel correspondant V. Formellement,

$$\begin{array}{rccc} V : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (r; h) & \longmapsto & V(r; h) = \pi r^2 h \end{array}$$

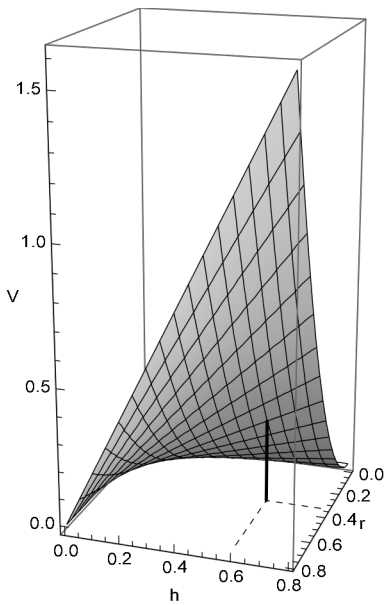
La représentation graphique nécessite deux dimensions pour (r, h) et une dimension pour $V(r, h)$. Le graphique sera donc réalisé dans un espace à 3 dimensions:

```
Plot3D[π r^2 h, {r, 0, 0.8}, {h, 0, 0.8}, BoxRatios → Automatic,
 ViewPoint → {3, 1, 1}, AxesLabel → {"r", "h", "V"}, ImageSize → {400, 400}]
```



L'option **`BoxedRatios→Automatic`** permet d'obtenir un système d'axes orthonormés tandis que l'option **`ViewPoint`** permet de régler le point d'où est vu le graphe (ce point de vue peut être modifié en cliquant sur le graphe).

Lisons maintenant ce graphe. Au point (r; h) = (0.4; 0.6) représenté avec des traits discontinue sur la figure ci-dessous correspond la valeur $V(0.4; 0.6) = \pi\, 0.4^2 \cdot 0.6 \simeq 0.3016$ figurée avec le trait épais. Le point (0.4; 0.6; 0.3016) est donc un point du graphe de V.



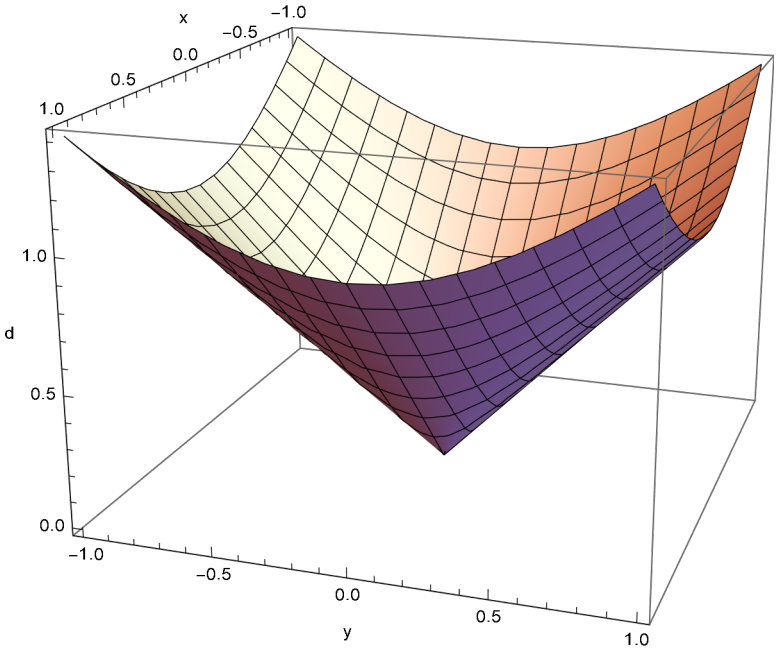
Exemple 2 : distance OP dans un plan

O désignant l'origine du repère du plan et les coordonnées d'un point *P* étant $(x; y)$, l'expression de la distance $d = \text{OP}$ est $d(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'ensemble de définition est tout le plan $\mathbb{R}^2$. La fonction "distance OP" associe à chaque paire $(x; y)$ le nombre réel correspondant $d = \text{OP}$. Formellement,

$$\begin{array}{llll} d: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x; y) & \longmapsto & d(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$

La représentation graphique est la suivante:

```
Plot3D[ √(x² + y²), {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, BoxRatios → Automatic,
 ViewPoint → {3, 1, 1}, AxesLabel → {"x", "y", "d"}, ImageSize → {400, 400}]
```



Une autre façon de représenter graphiquement une fonction de deux variables est de travailler avec des lignes de niveau :

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **ligne de niveau** de f un ensemble $\{(x; y) \in U \mid f(x; y) = c\}$, où c est une constante réelle.

Le graphique des lignes de niveau d'une fonction se fait dans Mathematica avec la fonction **`ContourPlot`**.

Reprenons l'exemple précédent pour illustrer ce concept:

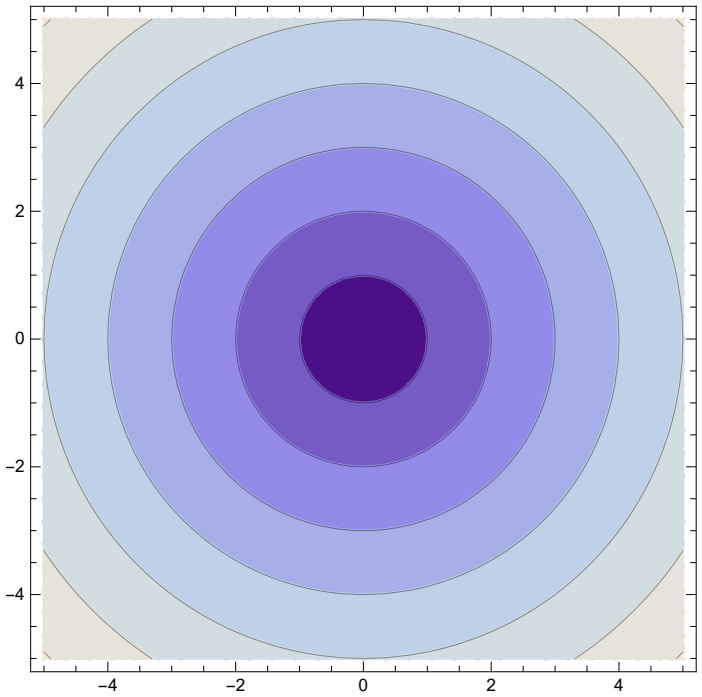
Exemple 2 : distance OP dans un plan (suite)

Les lignes de niveau de la fonction $d(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sont les ensembles $\left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{x^2 + y^2} = c\right\}$. Nous avons trois cas :

- $c < 0$: l'ensemble est vide;
- c=0 : la ligne de niveau est constituée d'un seul point, l'origine (0; 0);
- $c > 0$: la ligne de niveau est un cercle de rayon c centré à l'origine.

Vérifions cela avec Mathematica :

```
ContourPlot[Sqrt[x^2 + y^2], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



En se déplaçant sur ce graphe, Mathematica indique la valeur de la fonction d sur chacune des lignes de niveau représentées. En ajoutant l'option **`ContourLabels→True`**, la valeur de la fonction sur toutes les lignes de niveau est affichée.

Exercice 13 [sans/avec Mathematica]

Soit la fonction $f(x; y) = x \cdot y$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Dessiner sans Mathematica quelques lignes de niveau de f.

b) Dessiner avec Mathematica les lignes de niveau de f.

c) Dessiner avec Mathematica le graphe de f.

Exercice 14 [sans/avec Mathematica, facultatif]

Soit la fonction $f(x; y) = x^2 + 4\,y^2 - 8\,y$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer sans Mathematica la nature des lignes de niveau de f.

b) Vérifier votre résultat avec Mathematica

2.2 Voisinages, suites et continuité dans $\mathbb{R}^2$

Définitions

Soit $((x_n; y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^2$. Cette suite **converge** si les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et $(\lim_{n\to\infty} x_n; \lim_{n\to\infty} y_n)$ est sa **limite**. Nous notons

$$\lim_{n\to\infty} (x_n; y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n;\ \lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$

Cette définition signifie qu'une suite de $\mathbb{R}^2$ converge si et seulement si elle s'approche de plus en plus d'un point donné.

Exemple

$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}; \frac{3n^2}{n^2+1}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n}; \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+1}\right) = \left(2+0; \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2}\right) = (2; 3)$, par conséquent la suite $\left(\left(2+\frac{1}{n}; \frac{n^2}{n^2+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(2; 3)$.

Propriété

Soit $((x_n; y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^2$ et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. Cette suite **converge** vers $(a; b)$ si et seulement si la suite $\left(\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est-à-dire si (x_n, y_n) est de plus en plus proche de $(a; b)$.

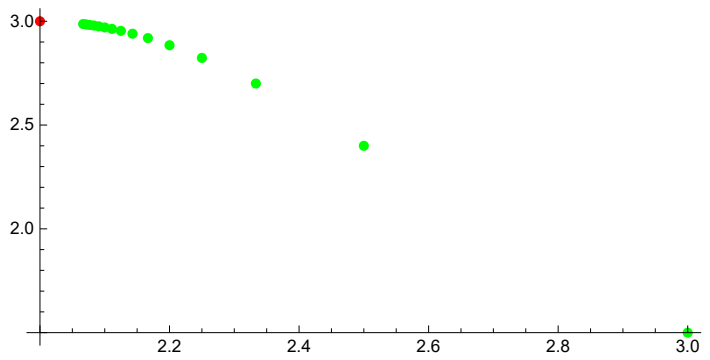
Preuve en exercice.

Exemple

Reprenons la suite $\left(\left(2+\frac{1}{n}; \frac{3n^2}{n^2+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'exemple précédent et représentons ces 15 premiers termes dans le plan :

```
z[n_] := {2 + 1 / n, 3 n^2 / (n^2 + 1)}
termes = Table[z[n], {n, 1, 15}];
limite = Limit[z[n], n → Infinity]
Graphics[
 {
  PointSize[0.015],
  {Green, Point[termes]},
  {Red, Point[limite]}
 },
 Axes → True, AspectRatio → 1 / 2
]
```

```
{2, 3}
```



Nous constatons que les points correspondant aux termes de la suite sont effectivement de plus en plus proche du point correspondant à la limite de celle-ci.

Définition

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $\epsilon > 0$. Le **disque ouvert de rayon ϵ centré $(a; b)$** est l'ensemble des points du plan situés à un distance de $(a; b)$ strictement inférieure à ϵ. Nous le notons $D_\epsilon(a; b)$. Nous avons donc $D_\epsilon(a; b) = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \epsilon\right\}$.

Définition

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $U \subset \mathbb{R}^2$. L'ensemble U est un **voisinage** de $(a; b)$ s'il existe $\epsilon > 0$ avec $D_\epsilon(a; b) \subset U$.

En d'autres termes, U est un voisinage de $(a; b)$ si $(a; b)$ n'est pas sur le "bord" de U.

Exemple

$U = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [-1; 1]\}$ est un voisinage de l'origine $(0; 0)$ car $D_{0.5}(0; 0) \subset U$ mais U n'est pas un voisinage de $(1; 0)$ car pour tout $\epsilon > 0$ nous avons $D_\epsilon(1; 0) \not\subset U$.

Définitions

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage d'un point $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est **continue** en $(a; b)$ si pour toute suite $((x_n; y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $(a; b)$ nous avons $\lim_{n\to\infty} f(x_n; y_n) = f(a; b)$. Si c'est égalité est fausse, nous disons que f est **discontinue** en $(a; b)$.

D'après cette définition, une condition nécessaire pour parler de continuité en $(a; b)$ est que f soit définie dans un voisinage de $(a; b)$. Deux cas de discontinuité peuvent se présenter :

1) Il existe une suite $((x_n; y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $(a; b)$ mais $\lim_{n\to\infty} f(x_n; y_n)$ n'existe pas.
2) Il existe une suite $((x_n; y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $(a; b)$ mais $\lim_{n\to\infty} f(x_n; y_n)$ existe mais n'est pas égale à $f(a; b)$.

Graphiquement cela signifie que le graphe de f aura une "oscillation" à proximité de $(a; b)$ dans le premier cas et un "trou" en $(a; b)$ dans le second. Des exemples se trouvent dans les exercices.

Remarque

Soit $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert contenant a et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Dans le cadre du cours de mathématiques renforcées de 3e année, la fonction f a été définie continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Il est alors possible de démontrer que f est continue en a si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$ pour

toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans I convergeant vers a. Par conséquent, si f est continue en a et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans I qui converge vers a, il est possible de permuter le calcul de la limite et l'évaluation de la fonction f : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$.

Nous avons choisi définir la continuité des fonctions de deux variables directement à partir des suites sans passer la définition de la limite d'une fonction de deux variables. En plus d'éviter la définition des limites, ceci permet de démontrer la continuité (ou la discontinuité) en s'appuyant directement sur le calcul des limites avec des suites dans $\mathbb{R}$. Cette façon de faire correspond aussi à l'approche intuitive dans la continuité en $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ d'une fonction f de deux variables : la fonction f est continue en $(a; b)$ si pour une suite quelconque de points qui s'approchent de $(a; b)$ les images par f de ces points s'approchent de $f(a; b)$.

Théorème

Soit $U \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant un nombre a, $V \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant un nombre b et $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ des fonctions continues en a, respectivement b. Les fonctions d'équation suivante et définies pour $x \in U$ et $y \in V$ et sont continues en $(a; b)$:
$z = f(x) + g(y)$, $z = f(x) - g(y)$, $z = f(x) \cdot g(y)$, $z = \frac{f(x)}{g(y)}$ (si $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in V$).

Preuve laissée en partie comme exercice supplémentaire.

Exemple

La fonction $h(x; y) = \sqrt[3]{x-3} \cdot y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car les fonctions $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ et $g(y) = y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage d'un point $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ des fonctions continues en $(a; b)$. Les fonctions suivantes sont aussi continues en $(a; b)$: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ et $\frac{f}{g}$ si $g(a; b) \neq 0$.

Preuve laissée comme exercice supplémentaire.

Exercice 15

Soit $((x_n; y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^2$ et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que cette suite converge vers $(a; b)$ si et seulement si la suite $\left(\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 16

Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.
Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $((r_n \cos(\alpha_n); r_n \sin(\alpha_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0; 0)$.

Exercice 17

Soit $U \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant un nombre a, $V \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant un nombre b et $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ des fonctions continues en a, respectivement b.
Montrer que la fonction $h(x; y) = f(x) \cdot g(y)$, définies pour $x \in U$ et $y \in V$, est continue en $(a; b)$.

Exercice 18 [avec Mathematica]

Mathematica ne permettant pas de calculer la limite d'une fonction de plusieurs variables, il n'est utile ici que pour construire une représentation graphique des fonctions étudiées.

a) Montrer que la fonction $z = f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$, est continue sur $(0; 0)$.

Indication : travailler avec des suites définies en coordonnées polaires.

b) Montrer que la fonction $z = f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x; y) \neq (0; 0), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ n'est pas continue en (0;0).

c) Calculer à la main $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x; y)\right)$, où f est la fonction définie au point b) de cette exercice. Que constatez-vous?

d) Étudier la continuité de la fonction $z = f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x; y) \neq (0; 0), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

e) Étudier la continuité de la fonction $z = f(x; y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x; y) \neq (0; 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

f) Étudier la continuité de la fonction $z = f(x; y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(x+1)^2+y^2}\right) & \text{si } (x; y) \neq (-1; 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2.3 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage d'un point $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et z=f(x;y) une fonction réelle définie sur U. Si la limite $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x; b)-f(a; b)}{\Delta x}$ existe et est finie nous disons que f est **partiellement dérivable** (ou **partiellement différentiable**) par rapport à x en $(a; b)$. Le résultat de cette limite est la **dérivée partielle** de f rapport à x en $(a; b)$ que nous notons $\frac{\partial f(a;b)}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a; b)$, $\frac{\partial}{\partial x} f(a; b)$, $\partial_x f(a; b)$ ou encore $f_x(a; b)$. Nous avons donc

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a; b) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x; b)-f(a; b)}{\Delta x}}$$

Dans le cas où la limite n'existe pas, nous disons que la fonction f n'est pas partiellement dérivable par rapport à x en $(a; b)$.

La dérivée partielle de f rapport à x en $(a; b)$ est donc la dérivée en a de la fonction d'une seule variable réelle $x \mapsto f(x;\ b)$. Dans le contexte des fonctions de plusieurs variables, l'adjectif "partiel"

signifie donc par rapport à une seule variable, les autres arguments étant considérés comme constants.

La dérivabilité partielle de f par rapport à y se traite de manière analogue. Si f est partiellement dérivable par rapport à chaque variable et en chaque point de U, nous disons que f est partiellement dérivable sur U.

Exemples

Soit $f(x; y) = \frac{x^2}{y}$. Calculons des dérivées partielle de f:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = \frac{1}{y}(2x) = \frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y}\right) = x^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = x^2\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-1}\right) = x^2(-1)\,y^{-2} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Soit $V(r,\ h) = \pi r^2 h$. Calculons des dérivées partielle de V en (0.4, 0.6) :

$$\frac{\partial V(0.4;0.6)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\pi r^2 h\right)\Big|_{(0.4;0.6)} = 2\pi r h\Big|_{(0.4;0.6)} = 2\pi\, 0.4\cdot 0.6 = 0.48\pi$$

$$\frac{\partial V(0.4;0.6)}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\pi r^2 h\right)\Big|_{(0.4;0.6)} = \pi r^2\Big|_{(0.4;0.6)} = \pi\, 0.4^2 = 0.16\pi$$

Calcul avec Mathematica

Avec Mathematica, le calcul d'une dérivée partielle peut se faire soit avec la fonction **D** (comme pour la dérivée des fonction d'une variable) soit avec l'opérateur $\partial_{\square}\,\square$ se trouvant dans la palette graphique (raccourci clavier : ESC pd ESC CTRL [_]).

Exemples

Calculons les dérivées partielles de la fonction $z = \frac{x^2}{y}$:

```
Clear["Global`*"]
```

$$\mathbf{D}\left[\frac{x^2}{y}, x\right]$$

$$\frac{2x}{y}$$

$$\partial_y\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

$$-\frac{x^2}{y^2}$$

Considérons maintenant le fonction $V(r; h) = \pi r^2 h$ donnant le volume d'un cylindre et calculons ses dérivées partielles en (0.4; 0.6) :

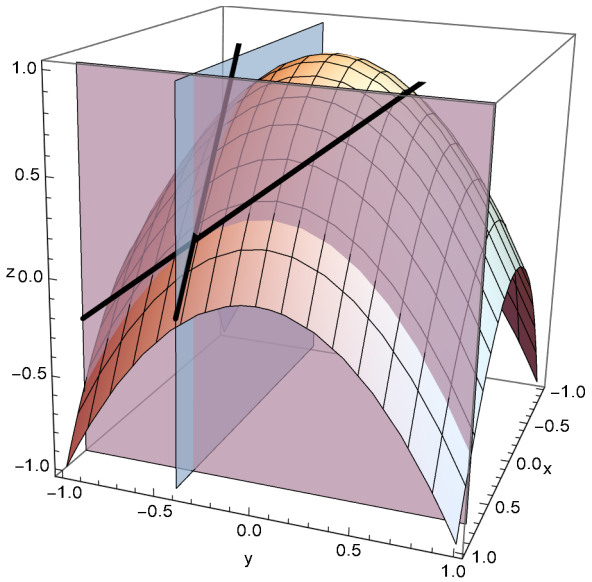
$$\mathbf{D}\left[\pi r^2 h, r\right] /. \{r \to 0.4,\ h \to 0.6\}$$

```
1.50796
```

```
∂h (π r^2 h) /. {r → 0.4, h → 0.6}
0.502655
```

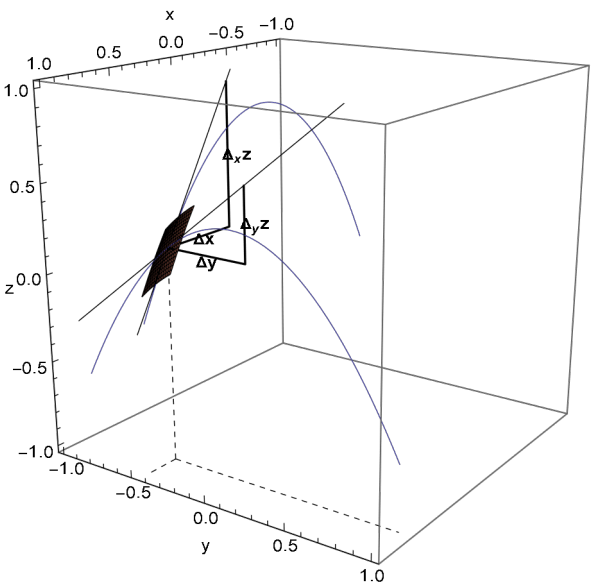
Interprétation géométrique

Illustrons la notion de dérivée partielle avec la fonction $f(x; y) = 1 - x^2 - y^2$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, dont le graphe est dessiné ci-dessous. Au point (0.8, −0.4), traçons les deux droites tangentes à la surface, la première dans le plan vertical x=0.8, la deuxième dans le plan vertical $y = -0.4$.



La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0.8;\ -0.4)$ est la pente de la droite qui est tangente à la surface au point $(0.8;\ -0.4,\ f(0.8; -0.4))$ dans le plan vertical $y = -0.4$. Dans la figure suivante, il s'agit du nombre $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(0.8; -0.4)$ est la pente de la droite qui est tangente à la surface au point $(0.8; -0.4,\ f(0.8; -0.4))$ dans le plan vertical $x = 0.8$. Dans la figure suivante, il s'agit du nombre $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.



Remarque

Pour une fonction réelle f définie dans un voisinage $U \subset \mathbb{R}^2$ d'un point $(a; b)$ et partiellement dérivable en $(a; b)$, nous pouvons définir un vecteur contenant ses dérivées partielles. Ce vecteur s'appelle le **gradient** de f en $(a; b)$ et est noté $\vec{\nabla} f(a; b)$. Nous avons alors

$$\vec{\nabla} f(a; b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} (a; b).$$

Si f est partiellement différentiable sur U, il est alors possible de montrer que le gradient de f est perpendiculaire aux lignes de niveau de f et donne la direction permettant d'obtenir une augmentation maximale des valeurs de f. Cette dernière propriété est utilisée en analyse numérique pour la recherche d'extrema locaux d'une fonction : il s'agit de l'algorithme de la descente de gradient.

Théorème

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage d'un point $(a; b)$ et z=f(x;y) une fonction réelle définie sur U. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent dans un voisinage de $(a; b)$ et sont continues en $(a; b)$ alors f est continue en $(a; b)$.

Sans preuve

Nous verrons dans un exercice que l'existence des dérivées partielles n'est pas une condition suffisante pour garantir la continuité.

Exercice 19 [sans/avec Mathematica]

a) Avec Mathematica, dessiner le graphe de la fonction $I = \frac{U}{R}$ sur le domaine $[5\text{ V}; 15\text{ V}] \times [500\ \Omega; 1500\ \Omega]$ puis imprimez-le.

b) Calculer à la main $\frac{\partial I\ (U;R)}{\partial U}$ et $\frac{\partial I\ (U;\ R)}{\partial R}$ en $(U; R) = (10\ V; 1000\ \Omega)$.

c) Expliquer et dessiner sur le graphique de I ce que représentent $\frac{\partial I\ (10\text{ V};1000\ \Omega)}{\partial U}$ et $\frac{\partial I\ (10\text{ V};1000\ \Omega)}{\partial R}$.

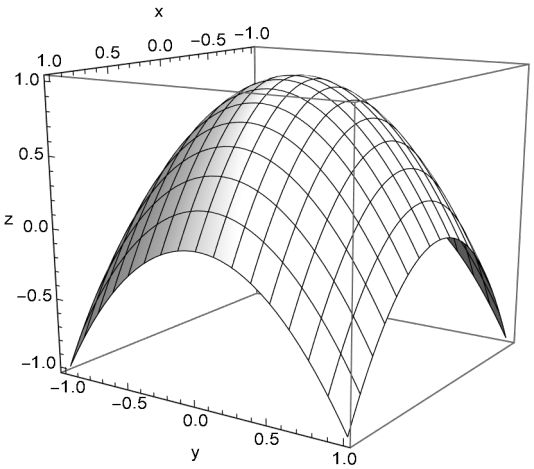
d) Facultatif : faites avec Mathematica un dessin similaire à celui de la 1ère interprétation géométrique des dérivées partielles.

Exercice 20 [sans Mathematica]

Pour $E = \frac{1}{2} m v^2$, calculer à la main les dérivées partielles $\frac{\partial E}{\partial m}$ et $\frac{\partial E}{\partial v}$ en $(m, v) = (2\text{ kg}; 5\text{ ms}^{-1})$.

Exercice 21 [sans Mathematica, facultatif]

On donne le graphique de la fonction $z = f(x; y) = 1 - x^2 - y^2$.



a) Construire les axes de coordonnées O_x, O_y, O_z qui passent par l'origine O du repère.

b) Construire le point $P(0.6;\ 0.5;\ f(0.6; 0.5))$

c) Donner une interprétation géométrique de la dérivée partielle de f par rapport à x en $(0.6;\ 0.5)$ puis estimer graphiquement sa valeur.

d) Donner une interprétation géométrique de la dérivée partielle de f par rapport à y en $(0.6;\ 0.5)$ puis estimer graphiquement sa valeur.

Exercice 22 [sans Mathematica]

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x; y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \cdot y = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Calculer les dérivées partielles de f en $(10; 0)$.

Exercice 23 [sans Mathematica]

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x; y) = (0; 0), \\ \frac{xy}{x^2+y^2} + x & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Montrer que f n'est pas continue en $(0; 0)$.

b) Montrer que f est cependant partiellement dérivable par rapport à x et par rapport à y en $(0; 0)$.

c) Montrer que les points a) et b) ne sont pas en contradiction avec le théorème vu à la page précédente.

Exercice 24 [avec Mathematica]

Pour $v = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}$, calculer avec Mathematica les dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ en $(x; y; t) = (3\text{ m}; 2\text{ m};\ 5\text{ s})$.

Exercice 25 [sans Mathematica]

Pour $v = \sqrt{2\,g\,h}$, calculer à la main toutes les dérivées partielles d'ordre1 de v en $(g; h) = (9.81\ \text{ms}^{-2};\ 2\ \text{m})$.

2.4 Dérivées partielles d'ordre 2

Définitions

Si $z = f(x; y)$ une fonction réelle de deux variables x et y qui est partiellement dérivable en x et y, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont, généralement, des fonctions de x et y. Il est par conséquent possible de tenter d'en calculer les dérivées par rapport à x et y. Ces dérivées sont appelées des **dérivées partielles d'ordre 2** et nous adoptons les notations suivantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{4}$$

Dans la définition (2), d'abord nous dérivons par rapport à y, puis nous dérivons le résultat par rapport à x tandis que dans la définition (3) nous dérivons d'abord par rapport à x puis par rapport à y. Les dérivées définies en (2) et (3) sont parfois appelées **dérivées mixtes**.

Le calcul des dérivée d'ordre 2 se fait avec Mathematica à l'aide de la fonction `D` ou de l'opérateur $\partial_{\square,\square}\,\square$.

Exemple

Pour calculer à la main les dérivées partielles d'ordre 2 de $f(x; y) = x \cdot e^y$, commençons par calculer les dérivées d'ordre 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^y.$$

Nous dérivons ensuite chacune de ces fonctions par rapport à chaque variable et nous obtenons les résultats suivants :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} e^y = 0,$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} e^y = e^y,$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} x \cdot e^y = e^y,$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} x \cdot e^y = x \cdot e^y$.

Vérifions avec Mathematica :

```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_] := x E^y
D[f[x, y], {x, 2}] (* calcul de ∂²f/∂x² *)
D[f[x, y], x, y] (* calcul de ∂²f/∂y∂x *)
∂x,y f[x, y] (* calcul de ∂²f/∂x∂y *)
∂y,y f[x, y] (* calcul de ∂²f/∂y² *)
```

0

e^y

e^y

e^y x

Théorème (Schwartz)

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage d'un point (a;b) et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Si les dérivées partielles mixtes d'ordre 2 de f existent dans un voisinage de $(a; b)$ et sont continues en $(a; b)$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a; b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(a; b)$.

Preuve en exercice.

Exercice 26 [sans/avec Mathematica]

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f dans chacun des cas, d'abord à la main, puis avec Mathematica.

$$z = f(x; y) = (x + y)^2$$
$$z = f(x; y) = 4 - x^2 - 2\,y^2$$
$$z = f(x; y) = x^2\,y^3$$
$$z = f(x; y) = x^2 \sin(y)$$
$$z = f(x; y) = \sin\left(x^2 + y\right)$$

Que constatez-vous?

Exercice 27 [sans Mathematica]

Soit la fonction $f(x; y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x; y) = (0; 0), \\ \frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Montrer que f est continue en $(0; 0)$.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

c) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0; 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0; 0)$. Que constatez-vous?

Exercice 28 [facultatif, sans *Mathematica*]

Démontrer le théorème de Schwartz. Pour cela, calculer la limite $\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t;b+t)-f(a+t;b)-f(a;b+t)+f(a;b)}{t^2}$...

- d'abord en travaillant avec la fonction $g(x) = f(x; b + t) - f(x; b)$ et le théorème des accroissements finis;
- puis en travaillant avec la fonction $h(y) = f(a + t; y) - f(a; y)$ et le théorème des accroissements finis;
- et finalement concluez.

2.5 Polynôme de Taylor de degré 1

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage d'un point $(a; b)$ et $z = f(x; y)$ une fonction réelle définie sur U dont les dérivées partielles d'ordre 2 existent dans un voisinage de $(a; b)$. Le **polynôme de Taylor de degré 1** (ou approximation linéaire ou linéarisation) de f en $(a; b)$ est le membre de droite de l'approximation

$$f(x; y) \approx L(x; y) = f(a; b) + \frac{\partial f(a; b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a; b)}{\partial y}(y - b)$$

et correspond à l'équation du **plan tangent** au graphe de f en $(a; b; f(a; b))$ (pour une illustration, voir les exercices).

Remarques

- La linéarisation d'une fonction f en un point $(a; b)$ est le polynôme de degré 1 ayant la même valeur et les mêmes dérivées partielles que f en $(a; b)$.
- Il est possible d'écrire le polynôme de Taylor de degré 1 d'une fonction en utilisant le gradient et le produit scalaire:

$$f(x; y) \approx L(x; y) = f(a; b) + \vec{\nabla} f(a; b) \bullet \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

- Il n'existe malheureusement pas de fonction de Mathematica qui donne directement le polynôme de Taylor d'une fonction de plusieurs variables. Une façon de l'obtenir avec un minimum de manipulations est de travailler avec le segment reliant les points $(a; b)$ et $(x; y)$ dont $\gamma : t \mapsto (a + t(x - a); b + t(y - b))$ est un paramétrisation et avec la fonction intermédiaire $g(t) = f(\gamma(t)) = f(a + t(x - a); b + t(y - b))$. Cette fonction d'*une variable* satisfait $g(0) = f(a; b)$ et $g(1) = f(x; y)$. Nous demandons alors à Mathematica d'évaluer le développement de Taylor de g en 0 en 1 avec la fonction `Series`. L'explication de la raison du fonctionnement de cette méthode est fournie dans l'exercice suivant.

Exercice 29 [facultatif, sans *Mathematica*]

Déduire de la formule de Taylor à une variable la forme du polynôme de Taylor de degré 1 d'une fonction réelle $z = f(x; y)$ en un point $(a; b)$...

- en travaillant avec la fonction intermédiaire $g(t) = f(a + t(x - a); b + t(y - b))$
- et utilisant le résultat suivant que nous ne démontrerons pas :
  $\frac{d}{dt} g(x(t); y(t)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t); y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t); y(t)) \cdot y'(t)$.

  Exemple :
  $\frac{d}{dt} g(3t + 5; t^2) = \frac{\partial g}{\partial x}(3t + 5; t^2) \cdot (3t + 5)' + \frac{\partial g}{\partial y}(3t + 5; t^2) \cdot (t^2)' = \frac{\partial g}{\partial x}(3t + 5; t^2) \cdot 3 + \frac{\partial g}{\partial y}(3t + 5; t^2) \cdot 2t$

Déduire des calculs précédents la valeur du reste de l'approximation de f par son polynôme de Taylor de degré 1.

Exercice 30 [sans/avec Mathematica]

Soit la fonction $z = f(x; y) = \frac{1}{2}(x^2 + 4y^2)$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Calculer sans Mathematica l'équation du plan tangent au graphe de f au point (2; 1; 4).

b) Représenter avec Mathematica le graphe de f ainsi que le plan tangent à celui-ci en (2; 1; 4).

c) [facultatif] En travaillant avec **`Manipulate`**, faire une figure représentant le graphe de f ainsi que le plan tangent à celui-ci pour des abscisses $x \in [-1; 1]$ et des ordonnées $y \in [-1; 1]$.

Exercice 31 [sans/avec Mathematica]

Soit la fonction $z = f(x; y) = x^2 y$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Trouver sans Mathematica la linéarisation de f au voisinage point (3; 1).

b) Vérifier la précision de votre estimation de f par linéarisation par quelques calculs avec Mathematica.

Exercice 32 [avec Mathematica]

Soit la fonction $z = f(x; y) = \sin(x y)$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
Calculer à l'aide de Mathematica $l(x; y)$, la linéarisation de f en $\left(\frac{\pi}{6}; 1\right)$.

Représenter dans un même repère les graphes de f et l.

2.6 Polynôme de Taylor de degré 2

L'approximation linéaire d'une fonction peut être améliorée en utilisant un polynôme quadratique :

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage d'un point $(a; b)$ et $z = f(x; y)$ une fonction réelle définie sur U dont les dérivées partielles de degré 2 existent dans un voisinage de $(a; b)$ et sont continues. Le **polynôme de Taylor de degré 2** (ou approximation quadratique) de f en $(a; b)$ est le donnée par la relation

$$f(x;y) \approx Q(x;y) = f(a;b) + \frac{\partial f(a;b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a;b)}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial^2 f(a;b)}{\partial x^2}\frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(a;b)}{\partial y\,\partial x}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f(a;b)}{\partial y^2}\frac{(y-b)^2}{2!}.$$

Remarque

Comme dans la définition du polynôme de Taylor de degré 2 les hypothèses de théorème de Schwarz sont satisfaites, l'ordre des dérivées dans la dérivée mixte n'a pas d'importance.

Exercice 33 [sans/avec Mathematica]

Soit la fonction $z = f(x;y) = \cos(2x+y) + 3\sin(x+y)$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Calculer sans Mathematica les polynômes de Taylor linéaire $L(x;y)$ et quadratique $Q(x;y)$ permettant d'approcher f dans un voisinage du point $(0;0)$.

b) Représenter et comparer avec Mathematica les graphes de $f(x;y)$, $L(x;y)$ et $Q(x;y)$.

c) Représenter avec Mathematica les courbes de niveau de $f(x;y)$, $L(x;y)$ et $Q(x;y)$.

Exercice 34 [sans/avec Mathematica]

Soit $f(x;y) = \sqrt{x+2y+1}$.

a) Calculer sans Mathematica la linéarisation $L(x;y)$ de f en $(0;0)$.

b) Calculer sans Mathematica le polynôme de Taylor $Q(x;y)$ de degré 2 de f en $(0;0)$.

c) Comparer avec Mathematica les courbes de niveau de f, L et Q.

§3 Applications

Dans cette section, nous allons poursuivre la généralisation de l'analyse des fonctions d'une variable à deux variables avec l'adaptation du critère de la dérivée seconde pour la recherche d'un extremum local. Nous appliquerons ensuite ce critère au problème de la régression linéaire. Finalement, nous utiliserons le développement de Taylor de degré 1 pour faire du calcul d'erreur.

3.1 Extrema locaux

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage d'un point $(a;b)$ et $z = f(x;y)$ une fonction réelle définie sur U. La fonction $z = f(x;y)$ possède un **maximum local** en $(a;b)$ si $f(x;y) \leq f(a;b)$ pour tous les points $(x;y)$ situés dans un voisinage de $(a;b)$. Elle possède un **minimum local** en $(a;b)$ si $f(x;y) \geq f(a;b)$ pour tous les points $(x;y)$ situés dans un voisinage de $(a;b)$. Si l'une de ces inégalités est vraie pour tout $(x;y) \in U$ alors l'extremum est **global**.

Si les dérivées partielles de f existent en $(a;b)$ et si f possède un extremum local en $(a;b)$ alors

- la fonction $x \mapsto f(x;b)$ possède un extremum local en a et la dérivée de cette fonction en a doit valoir 0 : $\frac{\partial f}{\partial x}(a;b) = 0$;
- la fonction $y \mapsto f(a;y)$ possède un extremum local en b et la dérivée de cette fonction en b doit valoir 0 : $\frac{\partial f}{\partial y}(a;b) = 0$.

Nous avons donc le critère suivant :

Théorème (critère nécessaire pour un extremum local)

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage d'un point $(a; b)$ et $z = f(x; y)$ une fonction réelle définie sur U dont les dérivées partielles existent en $(a; b)$. Si la fonction f possède une extremum local en $(a; b)$ alors toutes ses dérivées partielles en $(a; b)$ valent 0.

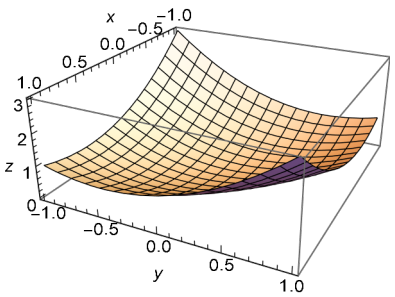
Si toutes les dérivées partielles d'une fonction f en $(a; b)$ valent 0 nous disons que $(a; b)$ est un **point critique** de f mais ceci n'est pas une condition suffisante permettant de garantir que f possède un extremum local en $(a; b)$. Étudions deux cas particuliers.

1er cas particulier

Soit la fonction $z = f(x; y) = x^2 + x\,y + y^2,\ (x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Si la fonction f possède un extremum local en $(x; y)$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = 0$. Nous devons donc avoir $2\,x + y = 0$ et $x + 2\,y = 0$ et le seul point critique de f est $(0; 0)$.

Représentons f au voisinage de $(0; 0)$.



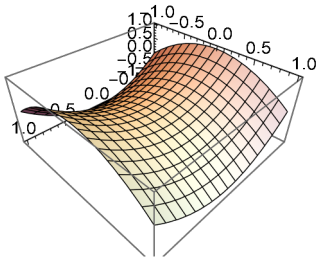
Le graphe de f suggère qu'il s'agit d'un minimum, ce que nous pouvons mettre en évidence algébriquement. En effet, $z = f(x; y) = x^2 + 2\,x\,y + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{3}{4}\,y^2$. Or, $f(0; 0) = 0$ et f étant la somme de deux carrés non simultanément nuls sauf en $(0; 0)$, il s'en suit que $f(x; y)$ est strictement positive pour tout $(x; y) \neq (0; 0)$. La fonction f possède donc un minimum absolu en $(0; 0)$.

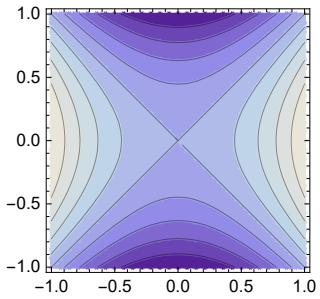
2e cas particulier

Soit la fonction $z = f(x; y) = x^2 - y^2,\ (x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Les points critiques de f sont donnés par les conditions $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,x = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2\,y = 0$ et le point $(0; 0)$ est le seul point critique.

Observons le graphe de f et ainsi que les courbes de niveau de f au voisinage de $(0; 0)$:





Nous avons $f(0; 0) = 0$ et nous constatons qu'il y a dans tout voisinage de $(0; 0)$ des points $(x; y) \neq (0; 0)$ pour lesquels $f(x; y) > 0$ et d'autres pour lesquels $f(x; y) < 0$. Le point $(0; 0)$ n'est donc pas un extremum local. Un tel point critique est appelé un **point-selle** (ou un col).

Étude de la fonction $f(x; y) = \alpha x^2 + \beta x y + \gamma y^2$

Nous nous intéressons maintenant aux extrema locaux de la fonction $f(x; y) = \alpha x^2 + \beta x y + \gamma y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ avec α, β, γ trois nombres réels non simultanément nuls. Un point $(x; y)$ est un point critique de f s'il satisfait les équations suivantes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,\alpha\, x + \beta\, y = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \beta\, x + 2\,\gamma\, y = 0.$$

Le point $(0; 0)$ est un point critique, mais quelle est sa nature?

Considérons d'abord le cas $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$. Nous pouvons écrire l'équation de f de la façon suivante :

$$z = f(x; y) =$$
$$\alpha x^2 + \beta x y + \gamma y^2 = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x y + \frac{\gamma}{\alpha} y^2\right) = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\,\alpha} y\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\,\alpha^2} y^2 + \frac{\gamma}{\alpha} y^2\right] = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\,\alpha} y\right)^2 + \frac{4\,\alpha\,\gamma - \beta^2}{4\,\alpha^2} y^2\right]$$

Posons $D := 4\,\alpha\,\gamma - \beta^2$ et distinguons les cas qui peuvent se produire en fonction du signe de D :

- Si $D > 0$, alors $H(x; y) := \left(x + \frac{\beta}{2\,\alpha} y\right)^2 + \frac{4\,\alpha\,\gamma - \beta^2}{4\,\alpha^2} y^2 = \left(x + \frac{\beta}{2\,\alpha} y\right)^2 + \frac{D}{4\,\alpha^2} y^2 > 0$ pour tout $(x; y) \neq (0; 0)$ car H est la somme de deux carrés non simultanément nuls. Deux cas se présentent :
  - Si $\alpha > 0$, alors $f(x; y) = \alpha\, H(x; y) > 0$ pour tout $(x; y) \neq (0; 0)$: f possède donc un minimum global en $(0; 0)$.
  - Si $\alpha < 0$, alors $f(x; y) = \alpha\, H(x; y) < 0$ pour tout $(x; y) \neq (0; 0)$: f possède donc un maximum global en $(0; 0)$.
- Si $D < 0$, alors $\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma > 0$ et nous pouvons écrire l'équation de f de la façon suivante :

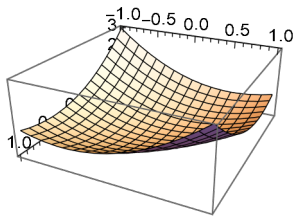
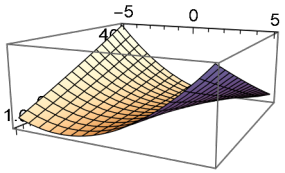
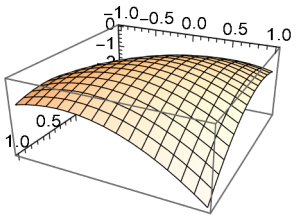
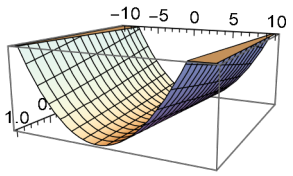
  $$f(x; y) = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\,\alpha} y\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma}{4\,\alpha^2} y^2\right] = \alpha\left(x + y\,\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma} + \beta}{2\,\alpha}\right)\left(x - y\,\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma} - \beta}{2\,\alpha}\right)$$

  Suivant le choix des valeurs de x et y, le produit des deux parenthèses est positif ou négatif. f possède donc un point-selle en $(0; 0)$.
- Si $D = 0$, alors $f(x; y) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\,\alpha} y\right)^2$ et le graphe de f est un cylindre parabolique : tout les points de la droite d'équation $x + \frac{\beta}{2\,\alpha} y = 0$, en particulier $(0; 0)$, sont des extrema globaux.

Traitons maintenant le cas $\boldsymbol{\alpha = 0}$. Nous distinguons les cas suivants :

- Si $\alpha = \beta = 0$ alors $D = 4\,\alpha\,\gamma - \beta^2 = 0$ et $f(x; y) = \gamma\, y^2$: le graphe de f est un cylindre parabolique (comme dans le cas $\alpha \neq 0$, $D = 0$) et tout point de l'axe O_y, en particulier (0; 0), est un extremum global.
- Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ alors $D = 4\,\alpha\,\gamma - \beta^2 = -\beta^2 < 0$ et $f(x; y) = \beta\, x\, y + \gamma\, y^2 = y(\beta\, x + \gamma\, y)$ est un produit qui peut être positif ou négatif pour des points arbitrairement proche de (0; 0) : (0; 0) est donc un point-selle (comme dans le cas $\alpha \neq 0$, $D < 0$).

Nous avons donc montré que, quelle que soit la valeur du paramètre α, c'est le signe de $D = 4\,\alpha\,\gamma - \beta^2$ qui permet déterminer si (0; 0) est un extremum. Le tableau suivant illustre et résume la situation

$4\,\alpha\,\gamma - \beta^2 > 0,\ \alpha > 0$: minimum global 	$4\,\alpha\,\gamma - \beta^2 < 0$: point – selle, pas d' extremum 
$4\,\alpha\,\gamma - \beta^2 > 0,\ \alpha < 0$: maximum global 	$4\,\alpha\,\gamma - \beta^2 = 0$: cylindre parabolique, extremum 

Remarquons finalement que le raisonnement fait pour $f(x; y) = \alpha\, x^2 + \beta\, x\, y + \gamma\, y^2$ reste applicable à une fonction $g(x; y) = \alpha(x - a)^2 + \beta(x - a)\,(y - b) + \gamma(y - b)^2$: dans ce cas le point critique est $(a; b)$.

Test des dérivées partielles de degré 2

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage d'un point $(a; b)$ et $z = f(x; y)$ une fonction réelle définie sur U dont les dérivées partielles sont continues jusqu'au 2e ordre dans un voisinage de $(a; b)$. Si $(a; b)$ est un point critique de f alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a; b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a; b) = 0$ et le développement de Taylor de degré 2 de f en $(a; b)$ donne l'approximation suivante:

$$f(x; y) \approx Q(x; y) = f(a; b) + \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b)}_{\alpha} \cdot (x - a)^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a; b)}_{\beta} \cdot (x - a)\,(y - b) + \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a; b)}_{\gamma} \cdot (y - b)^2$$

Nous appliquons alors le raisonnement fait pour $z = \alpha\, x^2 + \beta\, x\, y + \gamma\, y^2$ à Q, l'approximation quadratique de f en $(a; b)$ et nous obtenons $4\,\alpha\,\gamma - \beta^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a; b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a; b)\right)^2$. Nous avons alors le résultat suivant :

Posons $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a; b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a; b)\right)^2$.

- Si $D > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b) > 0$, alors f possède un **minimum local** en $(a; b)$;
- si $D > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b) < 0$, alors f possède un **maximum local** en $(a; b)$;
- si $D < 0$, alors f possède un **point de selle** en $(a; b)$;
- si $D = 0$, nous ne pouvons rien conclure.

Nous ne démontrons pas ce résultat. Intuitivement, les trois premiers cas découlent du fait que le reste $R(x; y)$ du développement de Taylor de degré 2 de f varie de façon moins importante que l'approximation quadratique. Ceci est aussi vrai pour le quatrième cas, mais comme le graphe de l'approximation quadratique de f est un cylindre parabolique, les points correspondant aux extrema se trouvent tous au sommet de ce cylindre et leurs cotes vont varier significativement lorsqu'on leur ajoute le reste $R(x; y)$ de telle sorte qu'on ne peut garantir que $f(x; y) - f(a; b)$ soit de signe constant dans un voisinage de $(a; b)$.

Remarques

Le nombre D peut s'écrire comme un déterminant :

$$D = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(a; b).$$

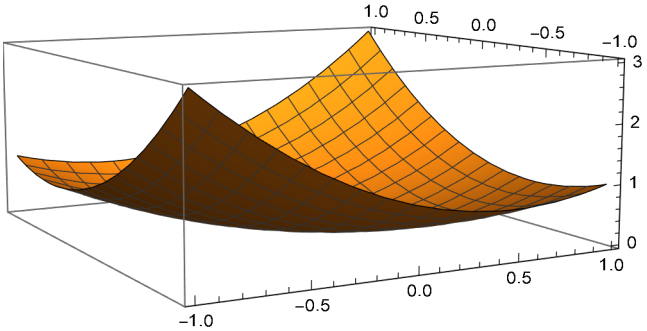
La matrice dont le déterminant est calculé s'appelle la **hessienne** de f. Cette matrice apparaît lors de l'utilisation de l'algèbre linéaire pour écrire le développement de Taylor de f en $(a; b)$. Il est possible de montrer que D est égale au produit des valeurs propres de la hessienne évalué en $(a; b)$. Dire que D est positif est alors équivalent à dire que les valeurs propres de la hessienne évaluée en $(a; b)$ ont même signe et le signe de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b)$ est le signe de celles-ci. (pour plus de détails, voir le cours d'algèbre linéaire appliquée disponible sur le site http://applmaths.collegedusud.ch).

Finalement, nous constatons que la transposition aux fonctions de deux variables du test de la dérivée seconde des fonctions d'une variable n'est pas correcte! Par exemple, les conditions $\frac{\partial f}{\partial x}(a; b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a; b) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a; b) > 0$ sont insuffisantes pour garantir un minimum en (a;b).

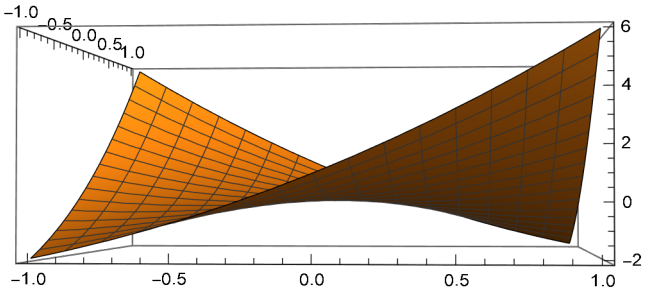
Exemple

Les fonctions $f_1(x) = x^2 + x\,y + y^2$, $f_2(x) = x^2 - 4\,x\,y + y^2$ et $f_3(x) = x^2 + 2\,x\,y + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ont toutes comme unique point critique $(0; 0)$. De plus, nous avons $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(0; 0) = 2 > 0$ et $\frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}(0; 0) = 2 > 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Ceci ne permet cependant pas de conclure à l'existence d'un minimum en $(0; 0)$. Pour s'en convaincre traçons les graphes de ces fonctions:

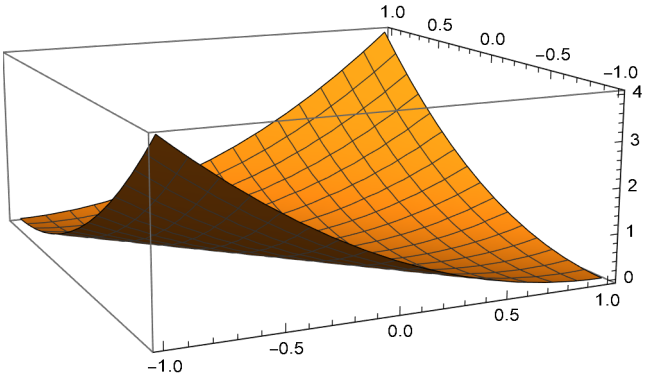
```
Plot3D[x^2 + x y + y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```




```
Plot3D[x^2 - 4 x y + y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```




```
Plot3D[x^2 + 2 x y + y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```



Regardons ce que le critère des dérivées partielles d'ordre 2 nous donne dans chaque cas:

- $D_1 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$=4-1=3>0 et $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(0;0) = 2 > 0$ donc f_1 possède un minimum local en (0; 0). Pour monter que ce minimum est global, nous faisons une complétion de carré:
  $f_1(x) = x^2 + x\,y + y^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot \frac{1}{2}\,y + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{3}{4}\,y^2 \geq 0 = f(0;0)$
- $D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 16 = -12 < 0$ donc f_2 possède un point de selle en (0; 0).

- $D_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0$ donc le critère des dérivées partielles d'ordre 2 ne permet pas de conclure. Cependant, si nous factorisons nous obtenons $f_3(x; y) = (x - y)^2$ ce qui signifie que la valeur minimale prise par f_3 est 0 et que cette valeur est atteinte lorsque $x = y$. En particulier, f_3 possède une minimum globale en (0; 0).

Remarque

Le résultat suivant n'est pas transposable à des fonctions de deux variables : si une fonction f continue définie sur $\mathbb{R}$ (ou plus généralement sur un intervalle ouvert) possède un unique extremum local alors celui-ci est automatiquement global (pour un exemples voir l'exercice 35 c).

Exercice 35 [sans/avec Mathematica]

Déterminer les points critiques des fonctions ainsi que leur nature sans Mathematica. Vérifier graphiquement vos résultats à l'aide de Mathematica.

a) $f(x; y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4,\ (x; y) \in \mathbb{R}^2$

b) $f(x; y) = 1 - \sin(x^2 + y^2),\ (x; y) \in D_1(0; 0)$

c) $f(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy,\ (x; y) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 36 [sans Mathematica]

a) Trouver trois nombres positifs dont la somme est égale à S et dont le produit est maximal.

b) Déduire du résultat précédent que $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ pour tout $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 37 [sans Mathematica]

Trouver la droite de régression des points (1; 1), (2; 1) et (3; 3), c'est-à-dire la droite dont la somme des carrés des distances verticales aux points donnés est minimale.

Exercice 38 [sans Mathematica]

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes ainsi que leur nature.

a) $f(x; y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

b) $f(x; y) = \frac{-4x}{x^2+y^2+1}$

Exercice 39 [sans Mathematica]

La demande des consommateurs pour un produit varie fonction de son prix mais aussi en fonction du prix proposé pour des modèles semblables mais de qualité différente.

Considérons deux modèles A et B de montres semblables. Nous notons p la quantité de montres A vendue et x le prix de vente (en francs) d'une montre A et nous notons q la quantité de montres B vendue et y le prix de vente (en francs) d'une montre B. Nous supposons que les quantités p et q varient en fonction de x et y de la façon suivante :

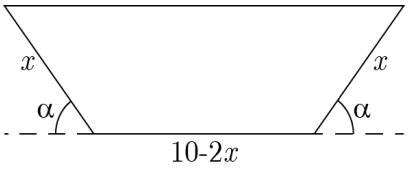
$$\begin{cases} p = 150 - 2x + y \\ q = 200 + x - 3y \end{cases}$$

a) Justifier la plausibilité des deux relations données.

b) Comment le fabricant vendant ces deux produits doit-il fixer ses prix pour obtenir un chiffre d'affaire maximal?

Exercice 40 [sans Mathematica] (BAC 2012)

On construit une cheneau symétrique, dont la section est de forme trapézoïdale, en pliant une plaque de 10 cm de largeur. On note alors x la longueur des côtés obliques de cette section et α l'angle aigu que font ceux-ci avec l'horizontale (voir schéma ci-dessous). On veut déterminer les valeurs de x et α pour que la capacité de la cheneau soit maximale.

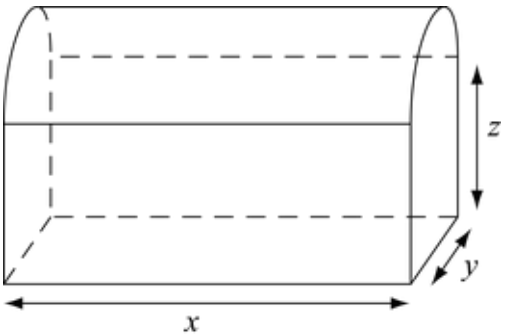


a) Montrer que l'aire d'une section de cheneau vaut
$A(x, \alpha) = 10\,x \cdot \sin(\alpha) + x^2 \cdot \cos(\alpha)\sin(\alpha) - 2\,x^2 \sin(\alpha)$,

b) Déterminer le maximum de cette fonction aire.

Exercice 41 [sans Mathematica]

Une coffre de 300 cm^3 a la forme d'un parallélépipède surmonté par un demi-cylindre comme dans la figure ci-dessous.



Déterminer les dimensions de la coffre d'aire totale minimale.

Source : Faccanoni, G. *Optimisation I.* Université de Toulon (2014-2015).

Exercice 42 [avec Mathematica]

Soit les fonctions $a(x) = x^2 + 5x + 6$ et $b(x) = -x^2 + 2x$ définies sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer la distance δ entre les graphes de a et b.

b) Notons A le point du graphe de a et B le point du graphe de B tels que AB = δ. Montrer que le segment AB est perpendiculaire à la tangente au graphe de a en A et ainsi qu'à la tangente au graphe de b en B.

c) Représenter graphiquement la situation en soignant le code (modification automatique du graphique si les fonctions sont changées).

Exercice 43 [avec Mathematica, facultatif]

Le premier janvier de chaque année, Zébriniev IV, tyran débonnaire du Pavukastan accorde une chance de survie aux condamnés à mort qui le souhaitent. Le condamné doit tirer une boule d'une urne contenant des boules noires et blanches et qui a été choisie au hasard par le tyran : si la boule est blanche, il obtient la grâce présidentielle, par contre si elle est noire, il est exécuté sur le champ.

Sachant que le condamné dispose de 20 boules blanches et de 20 boules noires, qu'il doit les répartir dans deux urnes identiques en respectant une seule consigne : « il doit y avoir au moins une boule de chaque couleur dans chaque urne », que c'est le tyran qui choisit au hasard l'urne dans laquelle le condamné tirera une boule, comment le condamné doit-il repartir les boules dans les urnes?

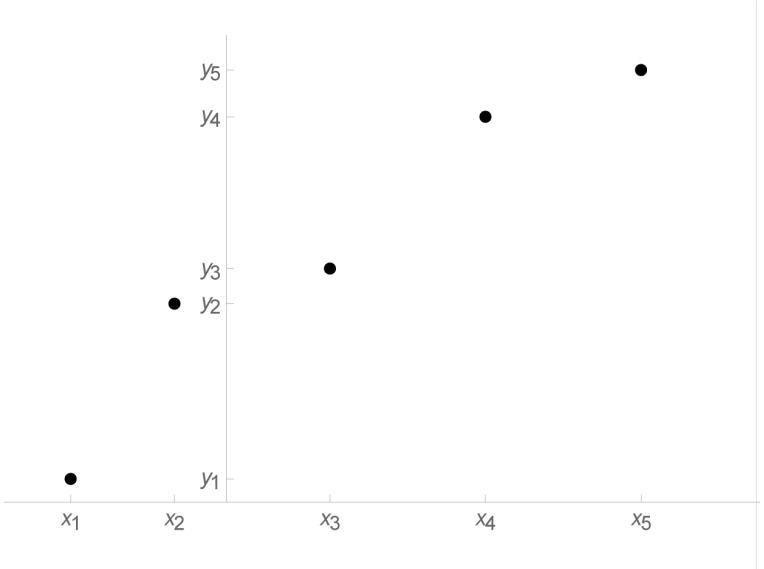
Source : Gueix, J.-P. *Enseignement de la statistique et des probabilités.* Cours CPS, Fribourg (11.11.2016).

3.2 Régression

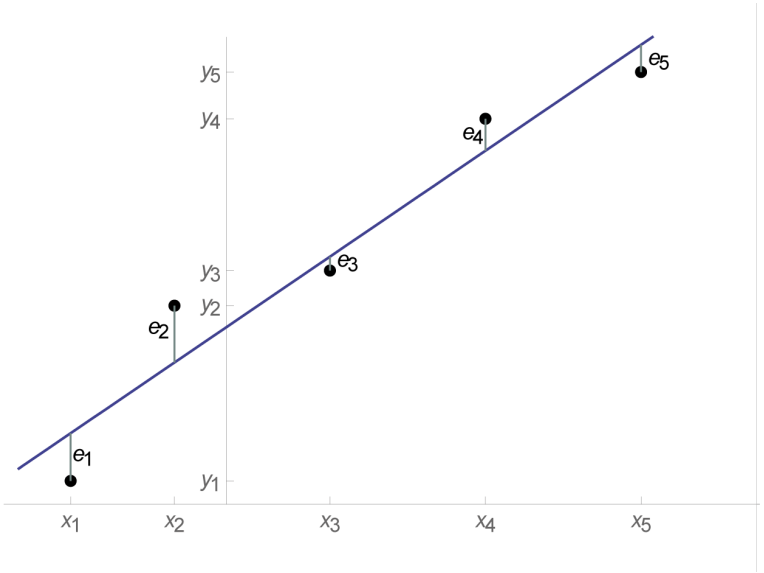
Dans le cadre de la théorie nous nous concentrerons sur la problème de la régression linéaire. Ce problème sera résolution par la méthode des moindres carrés. Nous verrons dans les exercices que cette méthode est aussi applicable pour d'autres régressions.

Énoncé du problème de la régression linéaire

Nous considérons deux grandeurs x et y que nous soupçonnons liées par une fonction affine (par exemple, la masse d'une personne et sa taille ou la longueur d'un ressort et la force exercée sur celui-ci). Afin de trouver cette fonction, nous effectuons n mesures $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ de ces deux grandeurs. La figure ci-dessous illustre un résultat obtenu pour $n = 5$ mesures.



D'après ce graphique, l'hypothèse qu'il existe une relation affine entre les variables x et y semble confirmée. Nous supposons donc que $y = a\,x + b$ et le fait que les points mesurés ne se trouvent qu'approximativement sur le graphe de cette fonction peut se justifier par l'incertitude sur les mesures. La figure suivante montre l'allure que peut avoir la droite correspondant au modèle exact reliant x et y.



Les écarts verticaux $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ entre les points mesurés et la droite s'appellent les **résidus**. Nous avons donc $e_k = y_k - (a\,x_k + b),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

La droite qui minimise la somme des carrés des résidus s'appelle la **droite de régression**. Nous disons que c'est la droite qui s'ajuste le mieux aux points mesurés au sens des moindres carrés (voir *Formulaire et tables*). Pour trouver cette droite, nous devons donc trouver deux nombres a et b tels que la somme $f(a; b) = \sum_{k=1}^{n} e_k{}^2$ soit minimale.

Solution

Soit n points $(x_1; y_1),\ (x_2; y_2),\ \ldots,\ (x_n; y_n)$ ayant au moins deux abscisses différentes. Nous notons $\overline{x}$ la moyenne des abscisses et $\overline{y}$ la moyenne des ordonnées. Les coefficients de l'équation de la droite de régression $y = a\,x + b$ correspondant à ces points sont alors

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k - \overline{x}\,\overline{y}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k{}^2 - \overline{x}^2} \text{ et } b = \overline{y} - a\,\overline{x}.$$

La preuve de ce résultat se fera dans le cadre des exercices.

Le numérateur du coefficient a s'appelle la covariance de x et y (noté $\mathrm{Cov}(x; y)$) tandis que le dénominateur est la variance de l'échantillon des valeurs de x (noté $s_x{}^2$, s_x étant l'écart-type) élevé au carré. Nous avons donc $a = \frac{\mathrm{Cov}(x;y)}{s_x{}^2}$.

Afin de mesurer la qualité avec laquelle notre droite est ajustée, nous pouvons calculer le **coefficient de corrélation** (noté $\rho(x; y)$) entre x et y :

$$\rho(x; y) = \frac{\mathrm{Cov}(x;y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k{}^2 - \overline{x}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k{}^2 - \overline{y}^2}}.$$

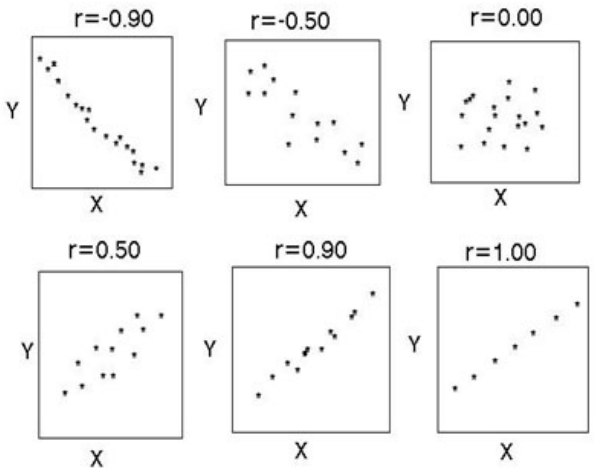
Il est possible de montrer que le coefficient de corrélation prend ses valeurs entre –1 et 1. De plus, nous avons les résultats suivants :

- Si $s_x \neq 0$ et $s_y \neq 0$ alors $|\rho(x; y)| = 1$ si et seulement si la droite de régression passe exactement par tous les points mesurés.
- Si les variables x et y sont indépendantes (la signification de ce terme sera précisé dans le cadre du cours de probabilité) alors le coefficient de corrélation est nulle. La réciproque de cette

affirmation est par contre fausse (par exemple, si $y = x^2$ et si les abscisses des points données sont réparties symétriquement autour de l'origine, alors le coefficient de corrélation est nul mais les variables x et y ne sont pas indépendantes). Le coefficient de corrélation donne donc une mesure de la corrélation *affine* entre deux variables.

- Le signe du coefficient de corrélation correspond au signe de la pente de la droite de régression.

La figure ci-dessous (source : http://www.simplypsychology.org) illustre différentes valeurs prises par le coefficient de corrélation.



Remarques

- La méthode des moindres carrés utilisée pour obtenir la droite de régression peut aussi s'appliquer pour trouver la "meilleure" combinaison linéaire de m fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Il faut alors chercher les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ qui minimisent la somme des carrés des résidus obtenus avec la fonction $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_m f_m(x)$. Les fonctions f_k peuvent être des polynômes (on parle alors de régression polynomiale), des exponentielles, des fonctions trigonométriques,... Dans le cas de la régression linéaire, nous avons pris $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = x$.
- L'équation d'une droite de régression, ou dans certain cas, d'une courbe de régression, peut s'obtenir grâce à la géométrie vectorielle en travaillant avec des projections orthogonales.
- Certains logiciels permettant de tracer des droites de régression donnent le coefficient de détermination r^2 : il s'agit du carré du coefficient de corrélation.
- Il existe des tests statistiques permettant de valider l'existence d'une relation affine entre deux variables. Il est de plus aussi possible de donner l'incertitude sur la mesure de la pente et de l'ordonnée à l'origine de la droite de régression.
- Attention, ce n'est pas parce que deux variables ont un coefficient de corrélation dont la valeur absolue est proche de 1 qu'il existe une relation de cause à effet entre celles-ci! La page Wikipedia sur le sujet donne l'exemple "d'une étude [publiée 2018] mettant en lumière une corrélation inverse entre l'alimentation bio et le risque de développer un cancer : cette étude a été reprise par la quasi-unanimité de la presse française sous le titre *Consommer bio réduit de 25% les risques de cancer*, sans prendre en compte les probables causes communes, comme le fait que l'alimentation bio est l'apanage de populations plus aisées faisant attention à leur santé de manière générale et ayant donc moins de facteurs de risque à la base". Le site `https://tylervigen.com/spurious-correlations` présente plusieurs séries de données

à corrélation fallacieuse.

Exemple

Soit les points (1; 6), (3; 5), (4; 3) et (5; 1). Déterminer l'équation de la droite de régression $y = a\,x + b$ ainsi que le coefficient de corrélation correspondant à ces points.

Résolution à la main :

- $\overline{x} = \frac{1}{4}(1 + 3 + 4 + 5) = 3.25$
- $\overline{y} = \frac{1}{4}(6+5+3+1) = 3.75$
- $\mathrm{Cov}(x; y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k - \overline{x}\,\overline{y} = \frac{1}{4}(1\cdot 6 + 3\cdot 5 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1) - 3.25\cdot 3.75 = -2.6875$
- $s_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k{}^2 - \overline{x}^2 = \frac{1}{4}\left(1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right) - 3.25^2 = 2.1875$
- $s_y{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k{}^2 - \overline{y}^2 = \frac{1}{4}\left(6^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2\right) - 3.75^2 = 3.6875$
- $a = \frac{\mathrm{Cov}(x;y)}{s_x{}^2} = \frac{-2.6875}{2.1875} \approx -1.23$
- $b = 3.75 - a\,\overline{x} \approx 7.75$
- $\rho(x; y) = \frac{\mathrm{Cov}(x;y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{2.6875}{\sqrt{2.18575}\cdot\sqrt{3.6875}} \approx -0.95$
- La droite de régression est alors $y = -1.23\,x + 7.75$. Le coefficient de corrélation vaut –0.95 ce qui signifie que la fonction affine trouvé est un bon modèle pour lier les variables x et y.

Une résolution semi-automatique avec Mathematica peut se faire en travaillant avec la liste des abscisses et la liste des ordonnées des points ainsi qu'avec la fonction **Mean** qui retourne la moyenne d'une liste. Cependant, la résolution la plus efficace se fait avec la fonction **Fit[pts,fonctions,variable]** où **pts** est une liste de points, **fonctions** une listes de fonctions (attention, il faut donner la définition algébrique des images et non pas les noms des fonctions; par exemple, nous écrirons **Log[x]** et non pas **Log**) et **variable** la variable utilisée pour donner les fonctions. **Fit** retourne alors la combinaisons linéaires des fonctions données qui minimise la sommes des carrés des résidus.

```
Clear["Global`*"]
pts = {{1, 6}, {3, 5}, {4, 3}, {5, 1}};
y[x_] := (Fit[pts, {1, t}, t]) /. {t → x}
y[x] // N
```

```
7.74286 - 1.22857 x
```

Le coefficient de corrélation se calcule avec la fonction. Il faut donc commencer par extraire de la liste **pts** des points la liste des abscisses et celle des ordonnées. Une méthode efficace consiste à prendre la transposée de la liste **pts**, c'est-à-dire la liste dont les "lignes" sont les "colonnes" de **pts** et inversement. Pour préciser cela, nous demandons à Mathematica d'afficher ces listes sous forme de tableaux:

```
pts // TableForm
Transpose[pts] // TableForm
```

1	6
3	5
4	3
5	1

1	3	4	5
6	5	3	1

Le premier élément de `Transpose[pts]` est alors la liste des abscisses et le second celle des ordonnées:

```
{abs, ord} = Transpose[pts]
```

```
{{1, 3, 4, 5}, {6, 5, 3, 1}}
```

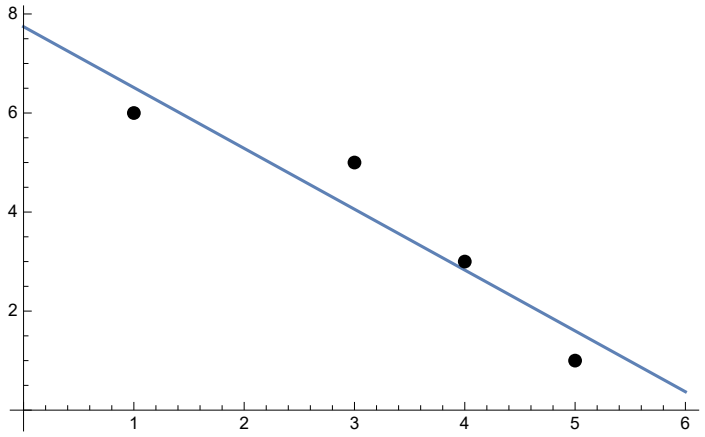
Nous pouvons alors calculer le coefficient de corrélation:

```
Correlation[abs, ord] // N
```

```
-0.946256
```

Le coefficient de corrélation étant proche de –1, la droite de régression devrait être proche est des points donnés. Vérifions-le avec Mathematica:

```
Plot[y[x], {x, 0, 6}, Epilog → {PointSize[0.02], Point[pts]}]
```



Notons finalement que les modes statistiques des calculatrices TI-30XIIS et Casio fx-85ES PLUS font aussi des calculs de régression et du coefficient de corrélation.

Exercice 44

Soit $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ des points ayant au moins deux abscisses différentes. Nous notons $f(a; b)$ la fonction donnant la somme des carrés des résidus correspondant aux points donnés et à la fonction affine $y = a\,x + b$.

a) Déterminer l'unique point critique de f.

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k{}^2\right) - n\,\overline{x}^2$.

c) Montrer que l'unique point critique de f est un minimum.

Exercice 45 [sans Mathematica]

Calculer à la main l'équation de la droite de régression ainsi que le coefficient de corrélation des points (1; 1), (2; 1) et (3; 3).

Exercice 46 [sans Mathematica]

Nous considérons les mesures suivantes :

x	1	3	4	6
y	1	2	4	4

a) Ajuster la droite $y = a\,x$ à ces données au sens des moindres carrés puis donner une formule générale.

b) Ajuster $y = b$ à ces données au sens des moindres carrés puis donner une formule générale.

Exercice 47 [avec Mathematica]

Parmi les étudiants de sexe masculin d'une université, 12 ont été tirés au hasard. Leur masse x en kilogrammes et leur taille respective y en centimètres ont été mesurées

x [kg]	70	68	63	72	60	66	70	74	65	62	67	65
y [cm]	155	152	150	180	135	156	168	178	160	132	145	139

a) Déterminer l'équation de la droite de régression $y = a\,x + b$ ainsi que le coefficient de corrélation de ces données.

b) Estimer la taille d'un étudiant de 90 kg à l'aide de ce modèle.

c) Déterminer l'équation de la droite de régression $x = \hat{a}\,y + \hat{b}$.

d) La fonction obtenue au point c) est-elle la réciproque de celle obtenu au point a)? Pourquoi?

Exercice 48 [avec Mathematica]

Voici une statistique du taux de natalité, exprimé en nombre d'enfants nés vivants en une année pour mille habitants, aux États-Unis.

x [année]	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
y [pour 1000 habitants]	25.0	23.7	21.3	18.9	16.9	17.9	19.5	23.6	24.6

Ajuster la parabole $y = a\,x^2 + b\,x + c$ au sens des moindres carrés à l'aide des fonctions d'ajustement de Mathematica puis représent graphiquement la situation.

Exercice 49 [avec Mathematica]

La société Métalex moule des pièces dans un four. L'ingénieur se demande s'il existe un lien entre la température (en degré Celsius) à laquelle les pièces sont moulées et leur résistance (en N/cm^2). Il dispose des données ci-dessous transmises par l'atelier.

température [°C]	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300
résistance $[N/cm^2]$	451	471	481	500	510	520	530	540	550	550	550

a) Ajuster un modèle linéaire de la forme $y = a\,x + b$, y correspondant à la résistance et x à la température.

b) Calculer le coefficient de corrélation de ces données.

c) Déterminer, d'après ce modèle, à quelle température doit être moulée une pièce pour que sa résistance soit d'au moins 525 N/cm^2.

d) Ajuster un modèle non-linéaire de la forme $y = \tilde{a}\log(x) + \tilde{b}$. Travailler sans utiliser les fonctions d'ajustement de Mathematica. Pour cela poser $\tilde{x} = \log(x)$ et commencez par calculer $\tilde{x}_k = \log(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, 11$, puis déterminer l'équation de la droite de régression $y = \tilde{a}\,\tilde{x} + \tilde{b}$ et finalement déduire l'équation de la courbe de régression dépendant de x. Prener garde à la définition de la fonction **Log** (voir l'aide)!

e) Vérifier le résultat précédent en travaillant avec les fonctions d'ajustement de Mathematica.

f) Calculer le coefficient de corrélation entre $\log(x)$ et y.

g) Placer dans un même repère les points mesurés ainsi que les courbes correspondant à chaque modèle.

Source : Geffray, S. *Corrélation linéaire et régression linéaire simple.* Université de Strasbourg (2008-2009).

Exercice 50 [avec Mathematica]

Si nous supposons que l'aire a des ailes d'un oiseau est proportionnelle au carré de son envergure et que le masse m de l'oiseau est proportionnelle au cube de l'envergure, nous pouvons en déduire que l'aire des ailes est proportionnelle à $m^{2/3}$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a = k \cdot m^{2/3}$ ou, de façon équivalente, tel que $\log(a) = \log(k) + \frac{2}{3}\log(m)$. Cela signifie qu'il y a une relation affine entre le logarithme de l'aire des ailes de l'oiseau et le logarithme de sa masse.

Afin de valider ce raisonnement, nous allons travailler avec plusieurs "oiseaux" dont la masse et l'aire des ailes ont été mesurées :

oiseau	**masse [kg]**	**aire $[m^2]$**
colibri	0.003	0.003
hirondelle	0.017	0.012
passereau	0.030	0.011
pic vert	0.200	0.033
chouette	0.505	0.168
canard	1.200	0.160
aigle royal	4.700	0.653
cygne	11.600	0.682
condor	15.000	1.500
Airbus A380	510 000	845

a) Représenter ces données dans un graphique dont les deux axes ont une échelle logarithmique (utiliser l'option `ScalingFunctions`).

b) Calculer le coefficient de corrélation entre entre $\log(m)$ et $\log(a)$. Commenter.

c) Déterminer l'équation de la droite de régression exprimant $\log(a)$ en fonction de $\log(m)$. Commenter.

Source : Charrière, F. *Présentation de l'OS-PAM.* Collège du Sud, Bulle.

3.3 Calcul d'erreur

Erreur sur une mesure

Comme il est impossible de connaître la valeur exacte d'une grandeur physique a, il est important de connaître l'incertitude Δa sur la mesure de cette grandeur.Si la mesure de cette grandeur donne la valeur $a_{\text{mesuré}}$, la valeur exacte de la grandeur se trouve dans l'intervalle $]a_{\text{mesuré}} - \Delta a; a_{\text{mesuré}} + \Delta a[$. Nous écrivons alors $a = a_{\text{mesuré}} \pm \Delta a$. L'incertitude Δa s'appelle l'**erreur absolue** sur a. L'**erreur relative** sur cette mesure est alors $\frac{\Delta a}{|a_{\text{mesuré}}|}$.

Propagation de l'erreur

Les mesures effectuées en sciences sont le plus souvent indirectes, c'est-à-dire que le résultat final d'une expérience est donné par la combinaison de plusieurs grandeurs qui, liées par une loi, con-

duisent au résultat cherché. Chacune de ces grandeurs ayant une certaine incertitude, le résultat de l'expérience en comporte aussi une qui dépend des incertitudes de chaque grandeur mesurée. Notre but est de déterminer comment l'incertitude de chaque grandeur se répercute sur le résultat final.

Supposons que nous avons n grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont nous mesurons les valeurs $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$ avec une erreur absolue $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Nous avons donc $\left| x_k - \hat{x}_k \right| < \Delta x_k$ pour $k = 1, \ldots, n$. A partir de ces mesures, nous calculons une nouvelle grandeur à l'aide d'une fonction f qui est définie dans un voisinage de $(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \ldots; \hat{x}_n)$. Nous obtenons alors la valeur $f(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \ldots; \hat{x}_n)$ qui est une estimation de $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Si f est partiellement différentiable, le développement de Taylor de degré 1 de f en $(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \ldots; \hat{x}_n)$ donne alors

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) \approx f(\hat{x}_1; \hat{x}_{2;}, \ldots; \hat{x}_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \ldots; \hat{x}_n) \cdot (x_k - \hat{x}_k).$$

Nous pouvons alors estimer l'erreur maximale entre $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui est la valeur exacte de notre nouvelle grandeur et $f(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \ldots; \hat{x}_n)$ qui est la valeur obtenue a partir des mesures effectuées :

$$\begin{aligned} \left| f(x_1; x_2; \ldots; x_n) - f(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \ldots; \hat{x}_n) \right| &\approx \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \ldots; \hat{x}_n) \cdot (x_k - \hat{x}_k) \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \ldots; \hat{x}_n) \right| \cdot \left| (x_k - \hat{x}_k) \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \ldots; \hat{x}_n) \right| \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

Nous notons Δf l'erreur maximale sur f et nous avons donc

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \ldots; \hat{x}_n) \right| \cdot \Delta x_k.$$

Exemple 1 : aire d'un rectangle

A l'aide d'une règle, nous mesurons les dimensions d'un rectangle. Calculer le demi-périmètre D et l'aire A de ce rectangle ainsi que leur incertitude si les mesures sont les suivantes :

$L = (4.22 \pm 0.05)$ cm, $l = (3.09 \pm 0.05)$ cm.

Nous avons $D = L + l = 7.31$ cm et

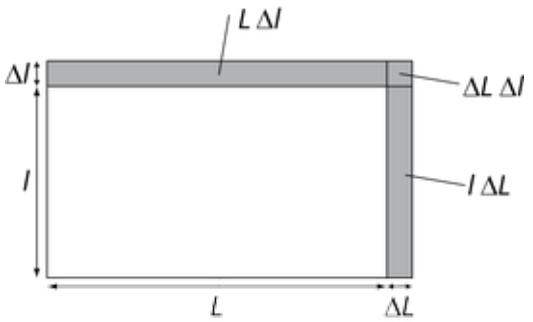
$$\Delta D = \left| \frac{\partial D}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial D}{\partial l} \right| \Delta l = \Delta L + \Delta l = 0.1 \text{ cm}$$

donc $D = (7.3 \pm 0.1)$ cm. Nous constatons que l'erreur absolue sur une somme correspond à la somme des erreurs absolues

Nous avons $A = L \cdot l = 13.0398$ cm^2 et

$$\Delta A = \left| \frac{\partial A}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial A}{\partial l} \right| \Delta l = l\,\Delta L + L\,\Delta l = 0.3655 \text{ cm}^2$$

donc $A = (13.0 \pm 0.4)$ cm^2. La figure ci-dessous illustre la formule utilisée : l'ajout des erreurs aux dimensions du rectangle augmente approximativement son aire de $L \cdot \Delta l + l \cdot \Delta L$, la partie d'aire $\Delta L \cdot \Delta l$ étant négligeable (dans le cas de notre exemple, $\Delta L \cdot \Delta l = 0.0025$ cm^2 , ce qui est effectivement négligeable).



Calculons maintenant l'erreur relative sur l'aire :

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{l\,\Delta L + L\,\Delta l}{L \cdot l} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta l}{l}.$$

Nous constatons l'erreur relative sur un produit correspond à la somme des erreurs relatives.

Exemple 2 : accélération d'une masse

Nous avons mesuré les deux composantes de la force résultante $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ qui s'exerce sur une masse m. Calculer la norme de l'accélération subie par cette masse avec son incertitude si les mesures sont les suivantes :

$F_x = 0.8$ N $\qquad F_y = 1.4$ N $\qquad m = 0.185$ kg

$\Delta F_x = 0.05$ N $\qquad \Delta F_y = 0.05$ N $\qquad \frac{\Delta m}{m} = 0.5\ \%$

Par la 2ème loi de Newton, nous avons $a = a(F_x; F_y; m) = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{m} = 8.716\ \mathrm{m/s^2}$ et

$$\Delta a = \left| \frac{\partial a}{\partial F_x}(0.8;\ 1.4;\ 0.185) \right| \cdot \Delta F_x + \left| \frac{\partial a}{\partial F_y}(0.8;\ 1.4;\ 0.185) \right| \cdot \Delta F_y + \left| \frac{\partial a}{\partial m}(0.8;\ 1.4;\ 0.185) \right| \cdot \Delta m.$$

Nous commençons par calculer les différentes dérivées partielles :

$$\frac{\partial a}{\partial F_x} = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial F_x}\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{2}\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2\,F_x) = \frac{F_x}{m\sqrt{F_x^2 + F_y^2}},$$

$$\frac{\partial a}{\partial F_y} = \frac{F_y}{m\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \text{ (calcul analogue)},$$

$$\frac{\partial a}{\partial m} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\ \frac{\partial}{\partial m}\left(m^{-1}\right) = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\ (-1)\,m^{-2} = \frac{-\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{m^2}.$$

Nous évaluons ensuite les dérivées partielles en (0.8, 1.4, 0.185) :

$$\frac{\partial a}{\partial F_x}(0.8;\ 1.4;\ 0.185) = 2.68\ \frac{1}{\mathrm{kg}},$$

$$\frac{\partial a}{\partial F_y}(0.8;\ 1.4;\ 0.185) = 4.69\ \frac{1}{\mathrm{kg}},$$

$$\frac{\partial a}{\partial m}(0.8;\ 1.4;\ 0.185) = -47.1\ \frac{m/s^2}{\mathrm{kg}}.$$

Nous avons alors

$$\Delta a = 2.68 \cdot 0.05 + 4.69 \cdot 0.05 + 47.1 \cdot 0.5\ \% \cdot 0.185 = 0.41\ \mathrm{m/s^2}.$$

Nous avons donc $a = (8.7 \pm 0.4)\ \mathrm{m/s^2}$.

Effectuons maintenant ces calculs avec Mathematica :

```
Clear["Global`*"]
mesures = {Fx → 0.8, Fy → 1.4, m → 0.185, ΔFx → 0.05, ΔFy → 0.05, Δm → 0.005 * 0.185};
a = Sqrt[Fx^2 + Fy^2 ] / m;
a /. mesures
```

```
8.71595
```

```
Δa = Abs[∂Fx a] ΔFx + Abs[∂Fy a] ΔFy + Abs[∂m a] Δm
```

$$\Delta m\ \mathrm{Abs}\left[\frac{\sqrt{Fx^2+Fy^2}}{m^2}\right]+\Delta Fx\ \mathrm{Abs}\left[\frac{Fx}{\sqrt{Fx^2+Fy^2}\ m}\right]+\Delta Fy\ \mathrm{Abs}\left[\frac{Fy}{\sqrt{Fx^2+Fy^2}\ m}\right]$$

```
Δa /. mesures
```

```
0.412332
```

Remarque

La méthode que nous avons vue permet de calculer l'erreur maximale sur un résultat $f(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n)$. Cependant, la probabilité que chaque grandeur soit entachée de son erreur maximale est faible et l'erreur peut être surestimée. Il existe une théorie statistique qui permet d'améliorer l'estimation de l'erreur sur f. Dans le cas où les mesures des grandeurs $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ sont indépendantes, nous pouvons utiliser la formule suivante :

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\hat{x}_1;\ \hat{x}_2;\ \ldots;\hat{x}_n)\cdot\Delta x_k\right)^2}\,.$$

Cependant, l'indépendance des mesures étant difficile à garantir, nous utiliserons pour tous les problèmes l'estimation de Δf fournie par le développement de Taylor de degré 1.

Exercice 51 [sans/avec Mathematica]

Calculer l'incertitude absolue sur $R = A\cos(\varphi)$ pour les valeurs numériques $A = 0.3$, $\varphi = 27\,°$, $\frac{\Delta A}{A} = 2\,\%$, $\Delta\varphi = 1\,°$.

a) sans ordinateur (attention, il faut travailler en radian!);
b) avec Mathematica.

Exercice 52 [sans Mathematica]

Déterminer l'erreur relative sur le quotient de deux grandeurs.

Exercice 53 [sans/avec Mathematica]

Sachant que l'incertitude relative sur la mesure du rayon r d'une boule est de 2 % et que celle sur sa masse m est de 0.5 %, calculer l'incertitude relative sur sa masse volumique.

a) sans ordinateur;
b) avec Mathematica;
c) littéralement avec Mathematica (on veut ici une formule générale dépendant de $\frac{\Delta r}{r}$ et $\frac{\Delta m}{m}$, les erreurs relatives sur r et m).

Exercice 54 [avec Mathematica]

Sous une tension U, un courant I traverse un fil de section circulaire. Calculer la résistivité du matériau constituant ce fil avec son erreur, sachant que les mesures ont donné les résultats suivants:

- tension : $U = (0.054 \pm 0.002)$ V;
- courant : $I = (2.00 \pm 0.05)$ A;
- diamètre du fil : $d = (0.501 \pm 0.005)$ mm;
- longueur du fil : $L = (29.5 \pm 0.3)$ cm;

Déterminer le matériau pouvant constitué ce fil.

3.4 Enveloppe d'une famille de courbes

Considérons une famille de courbes $f(x, y, a) = 0$ où a est un paramètre. A chaque valeur de a correspond une courbe de la famille notée C_a. Généralement, les courbes C_a ne recouvrent qu'une partie du plan xOy. De plus, nous pouvons également constater l'existence d'une courbe E à laquelle chaque courbe C_a est tangente en un point caractéristique. La courbe E reçoit alors le nom d'**enveloppe de la famille**.

Équation de l'enveloppe d'une famille de courbes

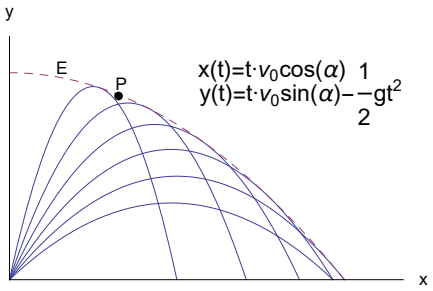
Considérons deux courbes voisines d'équations $f(x, y, a) = 0$ (1)
et $f(x, y, a + \Delta a) = 0$ (2)

Si un point $P(x; y)$ appartient aux deux courbes, ses coordonnées satisfont les équations (1) et (2) desquelles nous déduisons la relation $f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a) = 0$ puis

$$\frac{f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a)}{\Delta a} = 0$$

Lorsque $\Delta a \to 0$, les deux courbes tendent à se confondre et leur point commun P va se retrouver sur E. Ainsi, les coordonnées x et y vont satisfaire la relation

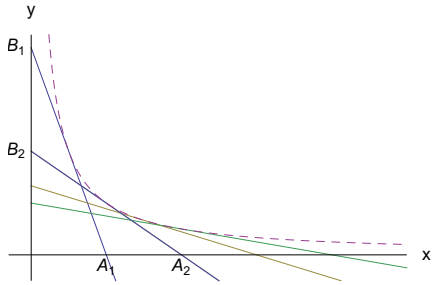
$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) = 0$$



Chaque point $P(x; y)$ de E est ainsi caractérisé par les conditions : $f(x, y, a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) = 0$

Exemple

On considère la famille des droites d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ telles que $a\,b = k^2$ pour une constante k donnée.



<u>Calcul de l'enveloppe de la famille des droites</u>

L'équation de la famille peut se mettre sous la forme $b\,x + a\,y - a\,b = 0$.

De la condition $a\,b = k^2$, nous tirons $b = \frac{k^2}{a}$. En remplaçant, nous trouvons $\frac{k^2}{a}\,x + a\,y - a\,\frac{k^2}{a} = 0$ ou encore

$f(x, y, a) = k^2\,x + a^2\,y - a\,k^2 = 0$. (1)

La deuxième condition à imposer est

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) = 2\,a\,y - k^2 = 0.$$

On en déduit la relation $a = \frac{k^2}{2\,y}$. Remplaçons dans (1):

$$k^2\,x + \left(\frac{k^2}{2\,y}\right)^2 y - \frac{k^2}{2\,y}\,k^2 = 0.$$

Après simplification, nous obtenons l'équation de l'enveloppe cherchée : $x\,y = \frac{k^2}{4}$.

Exercice 54

On considère la famille des droites d'équation $y = m\,x + \frac{1}{2\,m}$. Déterminer l'enveloppe de cette famille.

Exercice 55

On considère la famille des droites passant par les points $A(a; 0)$ et $B(0; b)$ telles que $a + b = L$. Déterminer l'équation de son enveloppe.

Exercice 56

On considère la famille des paraboles données par les équations paramétriques $x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t$ et $y(t) = (v_0 \sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$, où v_0 et g sont des constantes et α le paramètre. Déterminer l'équation de l'enveloppe de cette famille.