Mathématiques et arts

Les mathématiques dans le cinéma

La représentation des travaux et de la vie de John Forbes Nash Jr. faite dans *Un Homme d'exception* est-elle correcte?

Travail de Maturité

Quentin Perroud
Thomas Rosset

Collège du Sud, Bulle
Mars 2020

Travail de maturité réalisé
sous la direction de
Monsieur David Taj

(Mathématiques, Arts)

Table des matières

Remerciements

Avant de commencer, nous tenons à remercier :

Monsieur Vincent Guyot qui a créé un modèle de document LaTeX pour le travail de maturité ainsi qu'à Monsieur Laurent Karth Robadey qui l'a modifié pour répondre aux exigences du Collège du Sud.

Monsieur David Taj qui nous a suivis durant tout le travail de maturité et nous a donné des cours de mathématiques avancés spécifiques pour la théorie des jeux.

Tous les élèves ainsi que certains membres de nos familles qui ont pris le temps de répondre au sondage.

Nos parents, frère et sœur qui ont relu notre travail et nous ont soutenu tout au long de son élaboration.

Avant-propos

Avant toute chose, nous souhaitons préciser que l'idée de ce travail de maturité n'est pas de décrédibiliser le travail fourni par les cinéastes mais bel et bien de prendre leur travail comme point de départ à des recherches sur la vie et les travaux de John Forbes Nash Jr. Le but est d'en apprendre plus sur cet homme et, par la suite, de comparer la réalité au film qui, pour des raisons évidentes de qualité ou de temps, ne peut faire une représentation parfaite de la vie de John Forbes Nash Jr.

Quentin Perroud, Thomas Rosset

Introduction

0.1 Choix du thème

Le choix de ce thème pour notre travail de maturité s'est déroulé en plusieurs étapes.

Premièrement, nous avons eu l'idée de proposer un séminaire qui s'intitulerait *Les mathématiques dans les arts*. L'idée était de s'intéresser à plusieurs types d'arts comme la peinture, la musique, la sculpture ou l'architecture et d'analyser l'importance des mathématiques dans ces différents domaines.

Deuxièmement, l'idée des *mathématiques dans le cinéma* est apparue. Le but était de s'intéresser à la place qu'ont les mathématiques dans les films que nous regardons et de vérifier si ce qui y est dit est correct. L'analyse de tableaux mathématiques avait une place importante pour vérifier la justesse des formules qui y sont représentées.

Troisièmement, après le visionnage d'une vingtaine de film, l'idée de se concentrer sur un seul d'entre eux est apparue. S'intéresser plus profondément à un mathématicien ayant existé et à ses travaux puis comparer ceci avec ce qui est dit dans le film. C'est pourquoi nous en sommes arrivés à nous intéresser à la vie et aux travaux de John Forbes Nash Jr. qui fit des découvertes révolutionnaires et dont la vie fut palpitante.

La problématique ainsi trouvée est : « La représentation des travaux et de la vie de John Forbes Nash Jr. faite dans *Un Homme d'exception* est-elle correcte ? »

0.2 Méthodologie

L'idée était de découper le travail en plusieurs phases :

Premièrement, une étude de la vie de John Forbes Nash Jr. basée sur des recherches et la lecture de la biographie de Sylvia Nasar *Un cerveau d'exception : de la schizophrénie au nobel / la vie singulière de John Forbes Nash* sur laquelle est basé le film *Un homme d'exception*, suivie d'une comparaison entre la réalité et le film.

Deuxièmement, une étude de la théorie des jeux de John Nash afin de la synthétiser, l'expliquer et l'illustrer à travers divers exemples fictifs et réels, pour ensuite la comparer avec sa représentation dans le film et vérifier si le film lui est fidèle.

Enfin, un sondage en lien avec la théorie des jeux pour comparer les résultats théoriques avec ce que des personnes lambda auraient fait.

Chapitre 1

La vie de John Forbes Nash Jr.

1.1 Son enfance

John Forbes Nash Jr. est né le 13 juin 1928 à Bluefield en Virginie-Occidentale. Son père, John Forbes Nash Sir, ingénieur de profession et sa mère, Margaret Virginia Nash appelée Virginia, professeur de latin, tiennent beaucoup à lui.

John se montre rapidement comme étant un petit garçon très introverti avec un intellect développé que sa mère l'encourage à cultiver en lisant et en étudiant des sujets très compliqués pour son âge. Ses parents le forcent aussi à sortir pour se faire des amis et à jouer avec sa petite sœur Martha [1], mais ses principaux hobbies restent les échecs, l'écoute d'œuvres de Jean-Sébastien Bach et la mise en place d'expériences scientifiques multiples. Celles-ci sont faites devant ses camarades de classe ou, pour les plus dangereuses, avec Donald Reinelds et Herman Kirchnen, d'autres enfants de son âge. L'une d'entre elles sera même tellement explosive qu'elle coûtera la vie à Herman.

Malgré le fait que John ne soit pas un très bon élève quant au respect des règles et à ses relations avec les autres élèves - il est sujet à de nombreuses moqueries mais « rend les coups » à l'aide de son intelligence - il montre cependant un fort intérêt pour les sciences. Il apprend en lisant des livres que sa mère lui procure et corrige même parfois son professeur. Virginia s'occupe beaucoup de son fils d'un point de vue intellectuel. Elle s'arrange pour lui faire sauter des semestres ou pour qu'il puisse prendre des cours au collège de Bluefield dès 1941 malgré son jeune âge. Son intérêt pour les mathématiques arrivera plus tard, quand il découvrira le livre *Men of Mathematics*. [Nas01]

1.2 Ses études

1.2.1 Carnegie Institute of Technology (CIT)

John Forbes Nash étudie au Carnegie Institute of Technology à Pittsburgh dès 1945 et jusqu'en 1948. A la suite de la seconde guerre mondiale, l'intérêt porté pour les sciences et les mathématiques dans les écoles a très fortement augmenté car l'état et les entreprises ont besoin de plus en plus de scientifiques pour continuer les recherches lancées durant la guerre et pour vaincre la Russie dans la guerre froide. C'est pourquoi le CIT commence à avoir une forte réputation en mathématiques.

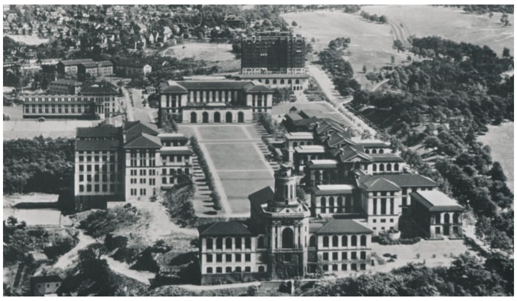


FIGURE 1.1 – Le CIT au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle [5]

Nash décide d'y entrer pour devenir ingénieur comme son père. De plus, il y obtient une bourse. Son passage au CIT est très important dans sa vie puisque c'est à ce moment qu'il décide de se tourner vers les mathématiques pour en faire son métier, convaincu par ses professeurs.

Ses relations avec les autres étudiants ne sont pas aisées, bien au contraire... Il est tourmenté, seul, et il subit beaucoup de moqueries quant à ses tendances homosexuelles. Nash est en recherche constante de reconnaissance. C'est pourquoi il décide de s'inscrire à un concours de mathématiques organisé pas l'une des universités les plus reconnues au monde : Harvard ! Mais il sera mal classé et en gardera une certaine rancœur et une certaine déception jusqu'à la fin de ses jours.

Malgré le fait qu'il fût mal classé au concours, Nash est toujours un élève brillant durant les cours. Il aide ses professeurs lorsque ceux-ci ne voient pas les erreurs qu'ils ont commises et il a déjà un savoir conséquent en mathématiques. A sa sortie du CIT, du fait qu'il ait d'excellentes connaissances, il a le choix entre 4 universités différentes pour continuer ses études : Chicago, Michigan, Harvard et Princeton. Le choix fut assez simple car le « Fine Hall », centre du département des mathématiques de Princeton, est un lieu rempli des plus grands mathématiciens de l'époque, Albert Einstein pour n'en citer qu'un seul. De plus, Princeton souhaite que Nash vienne y étudier. Et quand Princeton souhaite un élève, elle l'obtient. C'est pourquoi Nash eut le droit à la bourse J.S.Kennedy qui couvrait l'entièreté des frais pour étudier à Princeton avec même une chambre plus confortable que celle des étudiants ne bénéficiant pas de la bourse.

[Nas01]

1.2.2 Princeton

Durant ses études à l'université de Princeton, soit entre 1948 et 1950, Nash accomplit une infinité de choses.

FIGURE 1.2 – Le Fine Hall de Princeton [6]

A son arrivée à Princeton, Nash se fait quelques amis parmi les professeurs : Gale, Tucker ou Lefschetz qui est le chef du département de mathématiques et pour qui la production d'articles est plus importante que la présence durant les cours, ce qui arrange bien entendu Nash. Mais il se fait aussi plusieurs ennemis comme Emil Artin ou John Von Neumann qui ne seraient pas contre voir Nash quitter les lieux. Ces inimitiés sont dues à la manière d'être de Nash : il est solitaire, vaniteux, enfantin, orgueilleux, fait souvent preuve de vantardise et est même parfois violent ! Il n'hésite pas à poser des questions difficiles aux autres pour résoudre ses propres problèmes mathématiques. Il choisit ses interlocuteurs et ne s'attache pas à eux. Il est très peu présent durant les cours car il préfère apprendre seul en refaisant les calculs lui-même. Il travaille couché sur les tables ou en faisant les 100 pas, sifflant du Bach. Malgré tout cela, les autres étudiants ont quand même une forme de respect envers lui due à son génie.

De plus, Nash est très voire trop audacieux. Un jour, il a interpellé Albert Einstein pour lui demander d'avoir rendez-vous car il souhaitait lui donner des conseils sur la théorie des quantas. Après avoir écouté ce que Nash avait à lui dire, Einstein répondit : « Il faudrait en apprendre plus sur la physique jeune homme. » [1]

C'est aussi durant ses années en tant qu'étudiant à Princeton que Nash invente le jeu « Nash » très similaire au jeu « Hex » de la même période. Il a un immense succès à Princeton, où les professeurs et les élèves apprécient beaucoup ce genre d'activités intellectuelles.

FIGURE 1.3 – Plateau de Hex [10]

Mais son plus grand travail dans les murs de Princeton reste son mémoire sur la théorie des jeux de 1950, *Non Cooperative Games*, qu'il écrit pour valider son doctorat. Pour cet article, Nash s'inspire des travaux de Von Neumann et Morgenstern *Theory of Games and Economic Behaviour* mais y ajoute des dimensions fondamentales des jeux : la non-coopération et les jeux à somme non-nulle que Von Neumann et Morgenstern n'avaient pas pris en compte en se basant sur des jeux à somme nulle et la coalition entre les joueurs.

Les ajouts de Nash permettent une multitude d'applications de cette théorie : en économie, en sciences politiques, en sociologie ou encore en biologie évolutive. C'est d'ailleurs ce qui lui vaudra son prix nobel ! Mais cela ne plaît pas à Von Neumann, ce qui créera un conflit entre les deux hommes, au point que von Neumann qualifiera le concept d'équilibre de Nash comme n'étant qu'un « simple théorème du point fixe » [2].

[Nas01]

1. NASAR, Sylvia ; *Un cerveau d'exception : de la schizophrénie au Nobel, la vie singulière de John Forbes Nash ; Trad. de l'Anglais par DESMOND, William Olivier ;* Paris : Calmann-Lévy, 2001, 538p chapitre 5
2. NASAR, Sylvia ; *Un cerveau d'exception : de la schizophrénie au Nobel, la vie singulière de John Forbes Nash ; Trad. de l'Anglais par DESMOND, William Olivier ;* Paris : Calmann-Lévy, 2001, 538p chapitre 10

1.3 Sa vie adulte

1.3.1 Sa vie de couple

John Nash vit sa première relation de couple avec Eleanor Stier, une infirmière, un an après son entrée au Massachusetts Institute of Technology (MIT). Il a son premier fils avec elle, John David Stier, né le 19 juin 1953. C'en est trop pour John qui les abandonnera (quelle gentillesse !) [2]. Les parents de John sont choqués par la procédure judiciaire qui obligera leur fils à payer une pension alimentaire à son ex-compagne.

John Nash a deux relations homosexuelles avec Bricker et Thorson, qu'il niera, ainsi qu'une qu'on lui suspecte avec John Von Neumann mais qui n'est pas confirmée.

FIGURE 1.4 – John et Alicia [7]

Ensuite, il sort avec Alicia Esther Lopez-Harrison de Larde, qui est d'ailleurs bien appréciée par la mère de John Nash. Alicia était une des élèves de Nash. Elle est très intelligente et travaillera au MIT en tant que physicienne. John avait commencé à courtiser Alicia alors qu'il n'avait rompu ni avec Eleanor ni avec Bricker. Leur relation est officialisée en 1957 avec leur mariage et deux ans plus tard, en 1959, avec la naissance de leur fils, John Charles Martin Nash. Celui-ci est né le 20 mai 1959, une semaine avant que son père, interné pour schizophrénie, sorte de l'hôpital McLean [20]. Pour l'anecdote, John Charles est lui aussi schizophrène, et aura par ailleurs des hallucinations visuelles. Comme son père, il fera un doctorat en mathématiques [13].

Le couple sera bouleversé par la schizophrénie[3] de John Forbes Nash : ils finiront par divorcer en 1963, mais Alicia continuera cependant à aider son ex-mari financièrement puisqu'il ne peut pas travailler, et s'occupera même de lui. Entre 1965 et 1967, il retourne avec Eleanor et son premier fils, travaille à l'université Brandeis, mais la situation est très tendue. Il retournera chez sa mère Virginia à Roanoke en 1967, où vit encore sa sœur Martha. Cette dernière finira par ne plus pouvoir supporter son frère et le fera interner en 1970, ce qui effraie John. Il sortira 2 mois plus tard et décidera de couper toute relation avec sa sœur. John Nash re-

3. Sa schizophrénie est traitée en détail dans le point 1.4

tourne auprès d'Alicia avec qui il se remariera en 2001 et ne quittera plus jusqu'à la fin de ses jours [12].

[Nas01]

1.3.2 Son travail

Après avoir reçu son doctorat, John Nash travaille de 1950 à 1951 à Princeton, où il enseigne l'analyse. Puis, il devient professeur au MIT, jusqu'en 1959, où il fera des travaux dirigés en sciences entre 1951 et 1952. Ses élèves le considèrent comme sévère, les examens sont difficiles et il ne parle pas des recherches qu'il mène en parallèle durant ses cours. Durant les étés 1951, 1952 et 1954, il travaille aussi pour la RAND (Research ANd Development) Corporation en tant que consultant. Là-bas, ses travaux sur la théorie des jeux sont beaucoup utilisés dans le cadre de la guerre froide par l'état-major américain. Grâce aux réflexions fournies durant son travail, il apparaît aux militaires américains qu'ils n'ont aucun intérêt à déclencher une guerre nucléaire qui provoquerait une destruction massive. La stratégie adoptée est donc celle du dialogue. C'est à ce moment que l'idée de menaces de la théorie des jeux est très importante. Avant de commencer les négociations, chaque partie pose une condition indispensable à son accord et une menace qu'elle activera si cette condition n'est pas respectée. Cela assure le respect de la condition. De plus, la mise en place d'un arbitre dans ces négociations internationales se révèle indispensable. Nous pouvons donc penser que ce fameux arbitre sera la future Organisation des Nations Unies.

FIGURE 1.5 – Quartiers généraux actuels de la RAND [9]

John sera renvoyé de la RAND Corporation suite à ses soupçons d'homosexualité. Le simple fait d'être soupçonné suffit au renvoi. Il sera tout de même aidé par Lefschetz, Bochnet et Steerod pour obtenir un poste à Princeton mais en vain.

Durant ses travaux au MIT, il discute beaucoup en-dehors des cours avec les élèves et les autres professeurs, ils se posent des défis entre eux. Certains professeurs de cet institut vont d'ailleurs se faire renvoyer après des tensions politiques : ils furent accusés de communisme. Il va sans dire que cela est très mal perçu aux Etats-Unis durant cette période. John Nash sera d'ailleurs invité à participer à cette guerre : on le convoque au service militaire, qu'il souhaite éviter, tout introverti qu'il est. Viendront donc à sa rescousse la RAND Corporation et certains amis de Princeton, qui expliqueront que son travail est une aide très précieuse pour l'armée américaine.

Tout comme sa vie de couple, son travail sera bouleversé par l'arrivée de la schizophrénie mais il y aura cependant certains bénéfices. Certes ses nombreux séjours à l'hôpital ainsi que les médicaments qu'il doit prendre de temps à autre ont un impact conséquent sur ses capacités intellectuelles, mais sa maladie augmente sa capacité à penser autrement que le commun des mortels. Ceci lui permet d'attaquer les problèmes sous un angle nouveau et, par conséquent, de trouver les solutions différemment. Il aura ce petit grain de génie qui lui permettra de résoudre des problèmes très difficiles de manière révolutionnaire, mais cela rend aussi son raisonnement difficile à comprendre. John sera extrêmement efficace dans ses recherches. Cependant, il devra quand même faire une pause de 30 ans dans ses travaux entre 1960 et 1990, en partie aussi à cause d'une légère dépression due à sa schizophrénie [12]. Cela va pousser les gens à croire qu'il est mort, car il ne publiera rien et n'enseignera pas pendant cette période. Lorsqu'il retourne au travail, il n'est pas encore complètement guéri. Par conséquent, les élèves le voient surtout écrire des équations incompréhensibles sur les tableaux des couloirs, ce qui lui vaut son surnom de « fantôme de Fine Hall ». Lui-même se considére comme mort lorsqu'il répond : « You may use my article as if I were dead » quand le Dr. Myerson lui demande la permission d'utiliser un de ses articles [3]. A cause de cette pause, la plupart de ses travaux furent réalisés avant ses 32 ans : théorie des jeux, théorème de plongement, théorème de Nash-Moser, les travaux sur la géométrie algébrique, les variétés différentiables, la résolution du 19$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert pour en citer quelques-uns. Il s'amuse d'ailleurs à proclamer avoir résolu le théorème du plongement avant de s'y être intéressé, ceci dans le but de vérifier l'apport de notoriété qu'il gagnerait le cas échéant. Ayant jugé la gloire suffisante, il décide de trouver la réponse. Il fait de même pour le théorème Nash-Moser. En tout, il réalise 23 études scientifiques entre 1945 et 1996.

Pour finir, il guérira de sa maladie, recommencera à discuter avec d'autres mathématiciens et reprendra goût pour l'apprentissage et les mathématiques, particulièrement depuis 1990 : c'est à ce moment qu'il aura à nouveau des contacts sociaux. Il corrigera même un article de Peter Sarnak, preuve qu'il va mieux. En dehors des mathématiques, il développera aussi un grand intérêt pour les ordinateurs, qui ont bien eu le temps de progresser depuis ses dernières années « saines ».

[Nas01]

1.3.3 Ses prix, ses réussites et sa mort

Bien qu'il ait fait la plupart de ses travaux avant 1960, les prix n'arriveront que bien plus tard, ce qui n'enchante pas Nash qui est depuis très jeune à la recherche de prix pour prouver sa valeur. Dans ce but, il essaye de prouver l'hypothèse de Riemann. Ce n'est qu'en 1978 qu'il reçoit son premier prix, le prix de théorie John Von Neumann pour ses découvertes sur les équilibres non-coopératifs, donc en lien avec sa théorie des jeux. Puis, 16 ans plus tard, la gloire arrive avec la remise de son prix Nobel en économie, pour sa thèse de doctorat *Non-cooperative games*, partagé entre lui et deux économistes, Reinhard Selten et John Harsanyi. Lorsqu'on lui annonce qu'il pourrait recevoir un prix Nobel, c'est un choc pour lui et son entourage : cela fait à ce moment plus de 30 ans qu'il a rédigé la thèse qui est à l'origine de ce prix ! De leur côté, les organisateurs sont un peu inquiets car John Nash n'est pas considéré comme quelqu'un d'adéquat à l'image du prix Nobel par bien des personnes. Ceux-ci pousseront Waloddi Weibull à vérifier l'état mental de Nash. Ce-dernier et certains de ses amis arriveront à convaincre le comité que tout se passera bien, et tout se passa effectivement sans encombre. Une fois le prix reçu et le roi de Suède rencontré, Nash retourne aux Etats-Unis, plus précisément à Princeton, où on organise une petite fête en son honneur. C'est durant cette période de joie que Nash décide de reprendre contact avec sa sœur et son premier fils, John David Stier.

FIGURE 1.6 – John Nash, avec John Harsanyi et Reinhard Selten, à la remise de son prix Nobel [8]

L'année suivante, en 1995, Princeton lui donne le titre de doyen de recherches mathématiques, puis en 1999, il recevra le prix Leroy P. Steele pour son article *The Embedding Problem for Riemannian manifolds*, publié en 1956 dans *Annals of mathematics* [22]. En 2012, il est fait membre de la société américaine des mathématiques [20]. Finalement, le dernier prix qu'il reçoit fut le prix Abel, en 2015, pour ses contributions dans la *théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires et ses applications à l'analyse géométrique*[16]. Malheureusement, lorsqu'ils rentrent aux Etats-unis le 23 mai 2015, John et Alicia décédent d'un accident de taxi dans le New Jersey. Ils portaient cependant une part de responsabilité : certes, le conducteur a perdu le contrôle du véhicule, mais les deux amoureux n'avaient pas attaché leurs ceintures de sécurité, ce qui auraient pu leur sauver la vie [20].

[Nas01]

1.4 La schizophrénie

Évidemment, on ne peut pas parler de John Forbes Nash Jr. sans évoquer sa maladie : la schizophrénie. Celle-ci aurait commencé chez lui à l'âge de 31 ans, soit en 1959.

1.4.1 Ses hallucinations et leurs causes

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la majorité des hallucinations sont auditives. Il est très rare pour un schizophrène d'avoir des hallucinations visuelles, la plupart du temps les symptômes sont perçus sous la forme de bruits ou voix que les malades imaginent. Dans le cas de Nash, ces perceptions sensorielles sont souvent reliées à la politique : selon lui, il y aurait aux Etats-Unis un complot communiste dont les membres porteraient des cravates rouges pour se reconnaître entre eux.[12]

John Forbes Nash serait par ailleurs un extra-terrestre, un élu, qui aurait pour but d'accomplir une mission en décryptant des textes. Il cherche donc des signes partout. Sa quête le poussera à envoyer des lettres au gouvernement pour faire part de ses découvertes.

Ses crises sont souvent liées à deux facteurs en particulier : le stress et le travail. Nash a tendance à s'acharner sur ses activités, ce qui a comme effet de déclencher sa schizophrénie.

[Nas01]

1.4.2 Les conséquences

La schizophrénie dont souffre John Nash a bien des conséquences sur son travail, ses vies sociale et familiale. Concernant son travail, l'homme d'exception devra faire face à quelques complications. Par exemple, en 1959, lorsqu'il fait une conférence ayant pour but d'expliquer sa preuve de l'hypothèse de Riemann, tout tourne à la catastrophe. Certains iront même jusqu'à la qualifier d'incompréhensible, sans compter le fait que sa preuve était bien évidemment fausse (rappelons que l'hypothèse de Riemann n'a pas encore été prouvée à ce jour). Ensuite, les symptômes se font ressentir de manière croissante et les proches de John le trouvent de plus en plus bizarre. En outre, les médicaments qu'il doit prendre de temps en temps altéreront drastiquement son efficacité, sans parler des nombreuses fois où il est contraint de se faire interner pour traiter sa maladie. En 1959, il passe les mois d'avril et mai dans l'hôpital McLean, et fera encore bien d'autres séjours dans ces « prisons » jusqu'en 1970.

Concernant sa vie de famille, la maladie va presque tout détruire. Le fait qu'on la découvre en 1959 n'aide pas car elle arrive peu après qu'Alicia soit tombée enceinte. John Nash va donc devoir passer beaucoup de temps à l'hôpital plutôt qu'avec son très jeune fils.

Deux ans plus tard, en 1961, Nash retrouve une vie plus normale, du moins pour un certain temps. En effet, il fera une rechute en 1963, ce qui poussera le couple à divorcer.

Hormis cela, John Nash fait aussi des séjours entre Paris et Genève en 1959 dans le but de se faire expatrier. Il veut abandonner la citoyenneté américaine pour devenir « citoyen du monde » . Depuis l'Europe, il envoie des cartes cryptiques à ses proches et collègues, avant de se faire arrêter et renvoyer aux Etats-Unis.

[Nas01]

1.4.3 Les traitements

John Nash effectue plusieurs séjours hospitaliers pour tenter de mieux vivre avec sa maladie. Comme dit précédemment, il passe par l'hôpital McLean en 1959, dont il sort en prétendant aller mieux (ce qui est un mensonge). En 1961, il va au Trenton Hospital, plus pauvre, et passe deux fois par la clinique Carrier entre 1963 et 1965. Les méthodes utilisées dans ces endroits ne sont pas des plus douces : électro-chocs et surdoses d'insuline sont utilisés pour tenter de le guérir. Il faut par ailleurs préciser que Nash ne va jamais de son plein gré dans ces hôpitaux : il est forcé à y aller par ses proches (Alicia, qui le fait à contre-cœur, et sa sœur Martha). En dehors des hôpitaux, des médicaments sont prescrits à Nash, mais il ne les prend pas la plupart du temps. Alicia est d'une grande aide pour lui : elle essaie de limiter les traitements difficiles proposés dans les hôpitaux et, lorsque John est libre, elle incite ses amis à aller lui rendre visite, ce qui lui fait un bien immense. Avant même que John soit diagnostiqué schizophrène, elle va organiser des soirées avec leurs amis presque tous les week-ends, durant lesquelles John Nash parle en partie de mathématiques avec les invités (bien qu'il ait une réputation d'asocial à cause du film, en réalité, il est très social lorsqu'on arrive à percer sa carapace). Pour finir, un retour dans les couloirs de Princeton l'aide à guérir : il retrouve en ces lieux le calme, la liberté, et plus important encore, ses amis. Ceci sera son plus grand remède.

[Nas01]

Chapitre 2

Le film

Dans un essai de popularisation de la vie de l'un des meilleurs mathématiciens du XX$^{\text{ème}}$ siècle, la biographie qu'a rédigée Sylvia Nasar sur John Nash fut adaptée en film en 2001 par le réalisateur Ron Howard, aussi connu pour les blockbusters *Da Vinci Code* et *Anges et Démons* [23]. Le film a comme tête d'affiche Russel Crowe, dans le rôle de John Forbes Nash Jr [19].

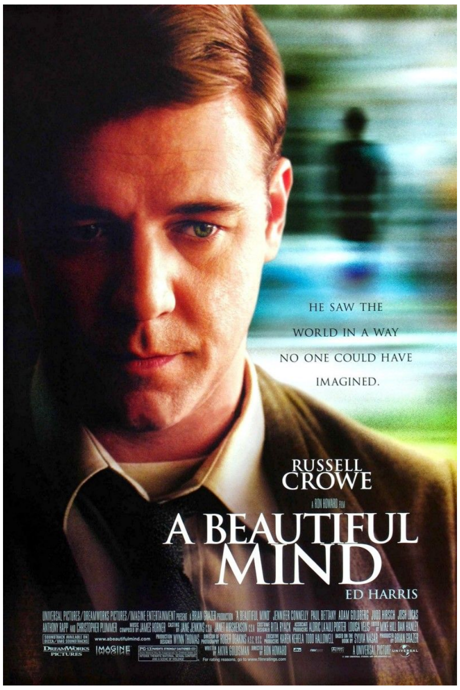


FIGURE 2.1 – L'affiche du film : *A beautiful Mind* [4]

Bien que la représentation cinématographique soit très agréable à regarder - c'est un bon mélange d'action, de suspense et de romance -, elle est loin d'être complètement fidèle à la réalité de la vie de John Nash. Personne n'est à blâmer. Comme le dit John Nash dans une interview : « How can you depict a life in that length of time ? It's not really possible. » [1] En effet, au moment de la sortie du film, John Nash avait déjà 78 ans.

Dans cette section, nous allons résumer le film de manière thématique, puis aborder les similitudes et les différences que contient l'œuvre par rapport à la réalité.

1. https://youtu.be/UiWBWwCa1E0?t=184

2.1 Son enfance et ses études

L'enfance de John n'est que très rapidement résumée dans le film : on n'en parle pour ainsi dire pas. La seule information qui est donnée est en analepse, lors d'un dialogue entre John Nash et son professeur d'école primaire qui aurait dit « Two helpings of brain but only half a helping of heart »[2] en parlant au jeune John. Cette phrase exprimerait un problème de contact social au profit de son aisance mentale, mais il n'est pas complètement vrai que John Nash rencontrait des difficultés relationnelles. Comme dit dans le chapitre précédent, il est très sociable une fois que l'on a réussi à percer sa carapace.

Concernant ses études, les détails se précisent. Cependant, rien n'est dit sur ses années au CIT : le film commence à Princeton, qu'il intègre en septembre 1947 alors qu'en réalité, il l'a intégrée un an plus tard. A l'école, il peine à se faire des amis (la seule personne avec qui il parle est son colocataire, Charles Herman, qui n'est rien d'autre qu'une de ses illusions). Certains se moquent de lui. Par exemple, après avoir perdu une partie du jeu de go contre un autre élève, il part en courant et renverse la table. Il se fait appeler « The great John Nash », d'un ton ironique[3]. En général, il se comporte de manière peu conventionnelle : il observe les animaux dans la cour[5], écrit sur les fenêtres du campus[6] et manque totalement de tact. Lors d'une soirée dans un bar, il aborde une femme, et reçoit une claque après avoir dit « I don't exactly know what I'm required to say in order for you to have intercourse with me, but could we assume that I said all that ? »[7] Tout ceci va un peu à l'encontre de sa vraie vie : il avait certes des comportements spéciaux, mais ce n'est pas pour autant qu'il était seul et à l'écart des autres. Au contraire, on l'appréciait bien ! Cependant, l'indépendance qu'a John Nash dans ses études est bien représentée dans le film : on ne voit aucune scène où John Nash est dans une salle de classe en train d'écouter

FIGURE 2.2 – Nash qui écrit sur une fenêtre de sa chambre[4]

2. *Un homme d'exception* : 7'44
3. *Un homme d'exception* : 11'20
4. *Un homme d'exception* : 6'25
5. *Un homme d'exception* : 9'20
6. *Un homme d'exception* : 11'50
7. *Un homme d'exception* : 14'30

un cours. En effet, il se ballade dans les couloirs, trouve ses propres idées, travaille seul.

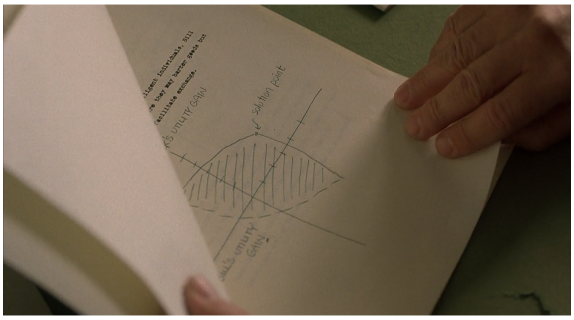


FIGURE 2.3 – Le document que Nash a remis pour son doctorat [8]

Comme dans la réalité, son travail de doctorat porte sur la théorie des jeux. Après avoir découvert Adam Smith, un philosophe et économiste du XVIIIème siècle qui aurait dit que l'individualité est ce qu'il y a de mieux [9], John Nash décide de remettre cette notion en cause dans son travail nommé *Non Cooperative Games*. Celui-ci va à l'encontre de toutes les théories économiques utilisées à cette époque. Ce n'est pas pour autant que le document est refusé. Au contraire, l'examinateur remarque l'audace dont fait preuve John Nash et met en avant l'excellence du travail : « Well, Mr. Nash, with a breakthrough of this magnitude, I'm confident you will get any placement you like. » [10]

2.2 Sa vie adulte

2.2.1 Sa vie de couple

La vie de couple est bien moins chaotique dans le film qu'en réalité. On ne parle d'aucune relation antérieure à celle avec Alicia (qui était comme dans la vraie vie élève de John Nash). Dans la fiction, leur union est célébrée après 1953 (aucune date précise n'est donnée) et ils restent ensemble toute leur vie, malgré les quelques séjours que John fait à l'hôpital psychiatrique. Aucun divorce n'est mis en scène dans ce film, même si Alicia peine à aimer John Nash à cause de sa maladie. Elle ne le quitte pas car elle se sentirait coupable de l'abandonner. En outre, elle l'imagine encore comme lorsqu'elle l'a rencontré, ce qui lui permet de l'aimer à nouveau [11].

8. *Un homme d'exception* : 22'38
9. *Un homme d'exception* : 21'00
10. *Un homme d'exception* : 23'15
11. *Un homme d'exception* : 1°21'00

Leur relation n'est pour autant pas parfaite. Plusieurs fois, Alicia désespère à cause de son mari, que ce soit à cause des médicaments [12] ou des hallucinations [13]. Lors d'une visite du Dr. Rosen, un employé de l'hôpital psychiatrique, elle avoue que son mari n'arrive pas à la satisfaire à cause des médicaments [14].

2.2.2 Son travail

Quant aux travaux de Nash, le film se permet quelques libertés mais reste tout de même fidèle à la vie du mathématicien. On ne parle pas de ses travaux à la RAND, mais de travaux au Pentagone pour analyser des signaux radios venant de Moscou en 1953. Peut-être que lors de l'écriture du script, ils ont pensé que le Pentagone était plus connu que la RAND (et ils n'ont pas vraiment tort, à vrai dire). Plus tard, John est engagé aux Wheeler Defense Labs du MIT. Bien que ce laboratoire n'existe en réalité pas [11], il a de fait travaillé au MIT jusqu'en 1959.

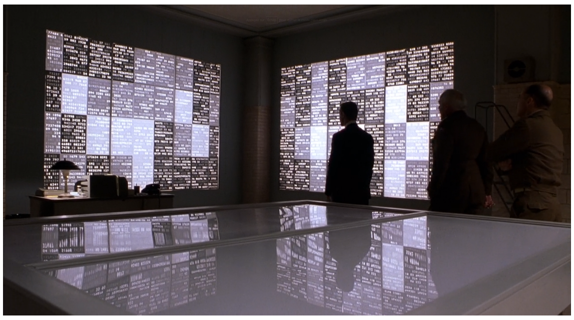


FIGURE 2.4 – Les signaux que John doit déchiffrer au Pentagone [15]

Comme dans le réalité, la schizophrénie va bousculer sa vie professionnelle. Alicia décide une première fois d'appeler un centre psychiatrique, puis, lors d'une conférence incompréhensible que Nash donne sur sa preuve de la conjecture de Riemann (conférence qu'il a aussi donnée en réalité), des hommes du centre l'emmènent de force [16]. Il doit rester à l'hôpital pour un certain temps, ce qui l'empêche complètement de travailler. Une fois sorti, il doit prendre des médicaments qui affaiblissent ses capacités intellectuelles et le ralentissent beaucoup. Il finit par ne plus les prendre, ce qui engendrera une rechute. Il retournera à Princeton pour travailler, car avoir de la compagnie l'aide à supporter sa maladie, malgré le fait que les premiers jours soient difficiles (cela fait longtemps qu'il n'a pas été exposé à l'extérieur). Il sera donc très sensible aux remarques que certains élèves font dans son dos.

12. *Un homme d'exception* : 1°28'30
13. *Un homme d'exception* : 1°37'30
14. *Un homme d'exception* : 1°39'00
15. *Un homme d'exception* : 25'33
16. *Un homme d'exception* : 1°03'50

2.2.3 Ses travaux et ses prix

Les réussites de John sont très peu abordées dans ce film. Le seul travail achevé dont on parle est son mémoire sur la théorie des jeux ainsi que le prix Nobel qu'il recevra pour celui-ci. Comme dans la réalité, les organisateurs sont inquiets pour la santé mentale de John Nash. Thomas King (personnage inventé pour l'occasion), qui travaille pour le comité du prix Nobel, vient lui rendre visite pour vérifier son état mental. Lorsque John apprend que le prix lui est attribué pour sa théorie des jeux, il est surpris : il pensait que ce serait plutôt un de ses autres travaux, par exemple son *manifold embedding*, qui lui vaudrait le succès. Il est aussi choqué par toutes les utilisations que l'on trouve à sa théorie et au *bargaining problem*[17]. Après leur entrevue, King est rassuré sur la santé mentale de Nash qui reçoit son prix Nobel en 1994, ce qui conclut le film.

FIGURE 2.5 – La conférence que Nash donne sur l'hypothèse de Riemann[18]

Beaucoup d'attention est étonnamment aussi portée à ses travaux sur l'hypothèse de Riemann. En réalité, il a en effet essayé d'expliquer sa preuve dans une conférence, aussi présente dans le film[19], mais l'œuvre cinématographique donne à ce problème une immense importance : on voit Nash travailler dessus à maintes reprises, que ce soit avant sa conférence, ou lorsqu'il se ballade de nouveau dans les couloirs de Princeton quelques années avant de recevoir son prix Nobel[20].

2.3 La schizophrénie

2.3.1 Ses hallucinations

Le film adopte un point de vue différent sur les hallucinations de John Nash. Pour effectuer une représentation efficace de la schizophrénie, les réalisateurs utilisent des hallucinations visuelles à la place des auditives que Nash a vraiment vécues. Ce choix est très logique : cela donne un bien meilleur rendu pour les spectateurs, même si

17. *Un homme d'exception* : 2°01'00
18. *Un homme d'exception* : 1°03'41
19. *Un homme d'exception* : 1°03'52
20. *Un homme d'exception* : 1°55'57

la fidélité à la réalité est altérée. Comme dans la vraie vie, bien des hallucinations tournent autour de la politique avec un certain William Parcher qui travaille pour le Département de la Défense des Etats-Unis. Il engage John pour décrypter des codes cachés par des espions soviets dans les journaux publiés par New Freedom qui leur permettraient de communiquer entre eux. Ils ne portent cependant pas de cravates rouges, celles-ci étant le symbole du complot communiste évoqué dans le point 1.4.1.

Nous retrouvons aussi l'hallucination qu'est son collègue de Princeton, Charles Herman. Il permet à John de sortir de sa coquille, de se relâcher un peu. Il reste à ses côtés durant toute sa vie, et amène même sa nièce Marcee avec lui lorsque Nash est adulte. Cette nièce, par ailleurs, va aider John à comprendre que Charles n'est qu'une hallucination car il se rend compte qu'elle ne grandit jamais [22] !

FIGURE 2.6 – Charles Herman, le « colocataire prodigue » [21]

La beauté qui réside dans la vision de la schizophrénie transmise par le film est que le spectateur ne sait pas tout de suite que ce sont des illusions. Ce n'est que lors de la première visite à l'hôpital psychiatrique, après une heure de film, que l'on apprend que John est schizophrène [23]. Il n'y a que quelques détails qui nous permettent de le prédire, par exemple, si l'on regarde bien, lorsqu'il crie le nom de Parcher dans les couloirs du MIT et qu'un de ses collègues le remarque [24].

2.3.2 Les conséquences et les traitements

La vie de couple sera dans le film bien moins impactée qu'en réalité. En effet, dans la fiction, ils restent toute leur vie ensemble. Quant aux travaux de Nash, les complications sont plus grandes. Il doit aller une première fois à l'hôpital psychiatrique alors qu'il donnait une conférence sur l'hypothèse de Riemann et il refuse d'admettre qu'il est schizophrène, croyant que le centre est tenu par les Russes. Il s'y résout finalement quand il se rend compte que l'implant qui lui permettait d'aller dans les locaux

21. *Un homme d'exception* : 51'24
22. *Un homme d'exception* : 1°38'30
23. *Un homme d'exception* : 1°09'00
24. *Un homme d'exception* : 1°01'00

secrets du Département de la Défense n'est plus là. C'est dur pour lui d'accepter cela. Comme le dit le Dr. Rosen dans le film :

> Imagine that you had suddenly learnt that the people, the places, the moments most important to you were not gone, not dead, but worse, had never been. What kind of hell would that be. [25]

FIGURE 2.7 – Un choc à l'insuline que Nash reçoit à l'hôpital [26]

Ensuite, les traitements s'enchaînent. Il doit subir 5 chocs à l'insuline par semaine, pendant 10 semaines. Même une fois hors de l'hôpital, les traitements ne s'arrêtent pas. Il doit continuer à prendre des médicaments qui impactent beaucoup sa vie : le grain de génie qu'il avait avant lui semble avoir disparu et il peine à trouver le bonheur dans la vie car il ne pense plus qu'au travail [27].

Finalement, il décide d'abandonner les médicaments sans le dire à Alicia, ce qui va grandement améliorer sa capacité à travailler. Elle ne le remarque pas tout de suite et John retombe dans la schizophrénie. Un jour, elle entend des bruits de radio dans la forêt proche de leur maison et elle trouve le bureau de son mari, où il a recommencé à travailler pour Parcher, sous la pression militaire qu'il s'imagine. John laisse le bébé qui est dans le bain sous la surveillance de Charles. Par conséquent, Alicia le sauve in extremis de la noyade. Après cela, Alicia appelle de nouveau le Dr. Rosen. Nash la frappe sans faire exprès en voulant pousser Parcher, qui menaçait sa femme. Elle tente de partir en voiture, mais Nash l'arrête car il a compris que Parcher et Charles étaient des illusions grâce à Marcee [28].

Après une visite du Dr. Rosen, Alicia reçoit des papiers qui l'autorisent à envoyer John à l'hôpital si elle en ressent le besoin. Au final, elle ne le fera jamais car elle pense qu'il existe une autre solution pour que Nash vive avec sa maladie. John trouve que Rosen a raison quand il dit qu'il est trop dangereux pour son entourage et il demande à sa femme de partir mais elle reste tout de même à ses côtés pour l'aider. Il décide de retourner à Princeton pour travailler de son côté et demande à Martin Hansen, un de ses vieux rivaux de l'époque qui est maintenant recteur de

25. *Un homme d'exception* : 1°18'30
26. *Un homme d'exception* : 1°20'12
27. *Un homme d'exception* : 1°24'00
28. *Un homme d'exception* : 1°34'30 à 1°38'50

l'université, s'il peut utiliser les couloirs et la bibliothèque pour travailler. Martin accepte. Plus tard, Nash a un conflit avec Parcher dans la cour de l'école. Ils se font encercler par beaucoup d'élèves qui regardent Nash bizarrement. Martin va venir à la rescousse de John qui va désormais décider de ne plus parler à ses illusions bien que la tentation soit grande. Après avoir travaillé de longues heures dans la bibliothèque et les couloirs puis avoir même donné des pseudo-cours dans la bibliothèque, il demande, en 1978, à Martin s'il peut intégrer le corps enseignant. Malgré le fait que Martin trouve que c'est un mauvais professeur, il tente tout de même de lui trouver une place de travail pour le printemps suivant.

En résumé, le film est certes fidèle à la réalité en bien des points mais il se permet tout de même de romancer fortement la vie du mathématicien. Ceci est parfaitement normal car on ne peut raconter une vie entière sans la simplifier. Un avis critique plus détaillé est donné dans la conclusion finale.

Chapitre 3

La théorie des jeux

3.1 Les bases de la théorie des jeux

Le but de cette partie est d'exposer les différents concepts essentiels à la bonne compréhension de la théorie des jeux et de fixer la notation qui sera utilisée dans la suite de ce travail. De plus, un exemple est utilisé tout au long de la section pour appliquer les principes théoriques discutés.

3.1.1 L'ensemble des joueurs

L'ensemble des joueurs contient, comme son nom l'indique, la totalité des joueurs. Un ensemble contenant $n \in \mathbb{N}^*$ joueurs $i \in [1; n]$ est noté ainsi :

$$I = \{1; 2; 3; ...; n\}$$

Prenons un exemple concret : imaginons une situation où trois joueurs (Alice, Bob et Cédric) doivent faire un certain nombre de cookies pour payer leur voyage d'étude, ils sont en concurrence et ne communiquent pas. Ils reçoivent en tout (peu importe la quantité de biscuits qu'ils font) 1000 CHF de revenu brut entre les 3, qu'ils se partagent en fonction de la quantité de cookies que chacun a produit.

$$I = \{Alice, Bob, Cédric\}$$

[FT91]

3.1.2 L'ensemble des stratégies

L'ensemble des stratégies S_i $\forall i \in I$ contenant $m \in \mathbb{N}^*$ stratégies du joueur i s'écrit ainsi :

$$S_i = \{s_{i,1}; s_{i,2}; \ldots; s_{i,m}\}$$

L'ensemble des stratégies de la situation étudiée, qui prend en compte tous les joueurs, s'écrit ainsi :

$$S = \bigtimes_{j=1}^{n} S_j = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$$

Dans notre exemple, tous les joueurs ont les mêmes choix, qui sont de produire 50, 100 ou 150 cookies. Il faut cependant noter que, dans la plupart des situations de théorie des jeux, les stratégies de chaque joueur sont différentes.

$$S_{Alice} = S_{Bob} = S_{Cédric} = \{50{,}100{,}150\}$$

Attribuons, pour simplification de notation, à chaque joueur un indice. Alice sera le joueur 1, Bob le joueur 2 et Cédric le numéro 3. [FT91]

3.1.3 La « Pay-off function »

La « Pay-off function » est tout simplement une fonction qui donne le résultat correspondant à la stratégie utilisée par le joueur. Le but des joueurs est naturellement de faire en sorte que ce résultat soit le plus élevé possible. Ce résultat est naturellement dépendant de la stratégie jouée par les adversaires. La pay-off function du joueur i peut être écrite ainsi :

$$u_i : S \to \mathbb{R}$$

$$(s_1; \ldots; s_n) \mapsto u_i(s_{-i}, s_i)$$

s_i étant la stratégie jouée par le joueur i et s_{-i} étant l'ensemble des stratégies jouées par les autres joueurs. On peut le définir comme :

$$s_{-i} = \{s_1; s_2; \ldots; s_{i-1}; s_{i+1}; \ldots; s_n\}$$

De plus, S_{-i} défini l'ensemble des stratégie de tous les joueurs excepté le joueur i. Soit :

$$S_{-i} = \bigtimes_{j=1}^{i-1} S_j \times \bigtimes_{j=i+1}^{n} S_j = S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$$

La « Pay-off function » globale à tous les joueurs est définie ainsi :

$$U : S \to \mathbb{R}^n$$

$$(s_1; ...; s_n) \mapsto (u_1(s_{-1}, s_1); u_2(s_{-2}, s_2); ...; u_n(s_{-n}, s_n))$$

$$U = \bigtimes_{j=1}^{n} u_j = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$$

La « pay-off function » permet de définir les jeux à somme nulle. Lors d'un jeux à somme nulle, ce que gagne un joueur est forcément perdu par un autre. La somme des « pay-off function » de chaque joueur est donc nulle $\forall s \in S$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s_{-i}, s_i) = 0$$

Quelques exemples de jeux à somme nulle peuvent être le poker ou encore les fameux pogs.

[FT91]

Dans notre exemple, le jeu n'est pas à somme nulle, puisque tous les joueurs gagnent de l'argent. Comme ils reçoivent 1000 CHF au total quoiqu'ils fassent, le revenu brut de chacun est proportionnel au nombre de cookies qu'il a produit. Celui-ci peut donc être exprimé ainsi :

$$u(s_{-i}, s_i) = \frac{1000}{\sum_{j=1}^{3} s_j} \cdot s_i$$

Les jeux finis (où le nombre de stratégies n'est pas infini) sont le plus souvent représentés sous forme de tableaux. Bien que ce format soit très pratique lorsqu'il n'y a que deux joueurs, le tout se complique quand il y en a plus. Ici, le choix d'Alice permet de définir quel tableau utiliser, le choix de Bob définit la colonne et celui de Cédric la ligne, comme ceci :

Si Alice choisit 50

		Choix de Bob		
		50	100	150
Choix de Cédric	50	$333.33, 333.33, 333.33$	250,500,250	200,600,200
	100	250,250,500	200,400,400	$166.66, 500, 333.33$
	150	200,200,600	$166.66, 333.33, 500$	$142.86, 428.57, 428.57$

Si Alice choisit 100

		Choix de Bob		
		50	100	150
Choix de Cédric	50	500,250,250	400,400,200	$333.33, 500, 166.66$
	100	400,200,400	$333.33, 333.33, 333.33$	$285.71, 428.57, 285.71$
	150	$333.33, 166.66, 500$	$285.71, 285.71, 428.57$	250,375,375

Si Alice choisit 150

		Choix de Bob		
		50	100	150
Choix de Cédric	50	600,200,200	$500, 333.33, 166, 66$	$428.57, 428.57, 142.86$
	100	$500, 166.66, 333.33$	$428.57, 285.71, 285.71$	375,375,250
	150	$428.57, 142.86, 428.57$	375,250,375	$333.33, 333.33, 333.33$

FIGURE 3.1 – Situation des cookies

Notons que tous les résultats ont été arrondis à deux chiffres après la virgule, pour simplifier la lecture.

3.1.4 La « Best response function »

La « Best response function » donne les meilleures stratégies à jouer en fonction de celles choisies par les autres joueurs. La « Best response function » du joueur i se définit ainsi :

$$B_i : S_{-i} \rightarrow 2^{S_i}$$
$$s_{-i} \mapsto B_i(s_{-i})$$

$$B_i(s_{-i}) = \{s \in S_i \mid \forall s' \in S_i,\ u_i(s_{-i}, s) \geqslant u_i(s_{-i}, s')\}$$

Avec $2^A = \{C|C \subset A\}$

La « Best response function » globale concernant tous les joueurs s'écrit ainsi :

$$B : S \rightarrow 2^S \ni (A_1 \subset S_1; ...; A_n \subset S_n)$$
$$(s_1; ...; s_n) \mapsto (B_1(s_{-1}) \subset S_1; B_2(s_{-2}) \subset S_2; ...; B_n(s_{-n}) \subset S_n)$$

[FT91]

3.1.5 La théorie des stratégies dominantes

La théorie des stratégies dominantes est très importante pour définir un *équilibre de Nash*. Le but est d'analyser l'ensemble des stratégies pour définir s'il y en a une qui appartient à la « Best response function » d'elle même quel que soit le choix des adversaires ou si une stratégie n'en fait jamais partie. Il faut bien entendu préciser que cette théorie ne peut que s'appliquer aux jeux finis et non aux jeux à stratégies infinies.

[FT91]

3.1.6 L'équilibre de Nash

Un équilibre de Nash est défini par le fait qu'aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie pour maximiser son profit (ou minimiser ses pertes). D'un point de vue mathématique, cela se définit ainsi :

$$s \in S \text{ est un équilibre de Nash si}$$

$$s \in B(s)$$

Nous pouvons donc remarquer que l'existence d'un équilibre de Nash peut être démontré à l'aide d'un théorème du point fixe. En effet, la stratégie globale jouée doit appartenir à sa « Best response function », ce qui est la définition même d'un point fixe ($x \in f(x)$). C'est pourquoi nous allons dans la prochaine partie aborder celui de Brouwer.

[OR94]

Pour trouver l'équilibre de Nash dans notre situation, il suffit d'utiliser la théorie des stratégies dominantes, qui est bien illustrée par notre exemple. Si l'on regarde ce qu'un joueur gagne en fonction du choix des autres, on se rend compte qu'il a toujours meilleur temps de produire 150 cookies. En effet, en attribuant un choix à Alice, on se retrouve dans une situation où seulement deux joueurs interviennent. De nouveau, en bloquant le choix de Bob, il ne reste plus que celui de Cédric à définir. On peut donc déduire ce que celui-ci devrait faire pour maximiser son profit. Puis nous modifions les choix des autres joueurs jusqu'à avoir parcouru toutes les combinaisons de stratégies possibles. En faisant cela, on remarque que Cédric a toujours meilleur temps de produire le nombre maximal de cookies. Ensuite, on peut appliquer la même méthode pour analyser le choix de Bob (sauf que, puisque l'on sait que Cédric va toujours produire 150 cookies, il n'y a pas besoin de faire varier sa stratégie), puis celui d'Alice. Au final, on remarque que les trois devraient produire 150 cookies chacun, pour un revenu brut de $333.\overline{3}$ CHF par personne. Cependant, ce résultat s'obtiendrait aussi si chacun produisait 100 cookies, ou même 50, ce qui paraîtrait plus logique. On rencontre ici une des limites de la théorie des jeux : certes, dans un contexte théorique où tout le monde joue pour lui-même (non-coopératif), produire un nombre maximum de cookies est optimal. Cependant, en réalité, un modèle coopératif serait plus adapté à cette coopération, et celui-ci amènerait à un résultat différent, surtout en prenant en compte les coûts de production. On se retrouve devant un des problèmes de la théorie des jeux, dont on discutera en détail dans le point 3.5.

3.2 Le théorème du point fixe de Brouwer

Dans la partie précédente, nous avons vu que l'existence d'un équilibre de Nash peut être démontré à l'aide de théorème du point fixe. Nous allons maintenant essayer de démontrer l'existence de point fixe à l'aide de celui de Brouwer.

Hypothèses

Soit :

(a) I un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ compact, convexe et non-vide

(b) $f : I \to I$
$I \ni x \mapsto f(x) \in I$

(c) f est continue

Thèse

$\exists x \in I | x = f(x)$

3.2.1 Quelques concepts importants

Avant de commencer, il faut expliquer ce qu'est un ensemble convexe et ce qu'est un ensemble compact car ceci nous sera utile plus tard lors de nos démonstrations.

Ensemble convexe

Un ensemble convexe dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui a la particularité que, si nous prenons 2 points quelconques contenus dans cet ensemble, le segment les reliant sera inclus entièrement dans l'ensemble. C'est le cas du disque, du carré, de la boule ou du cube dans $\mathbb{R}^n$ mais pas du fer de lance dans $\mathbb{R}^2$ par exemple.

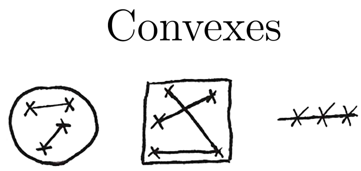


FIGURE 3.2 – Figures convexes

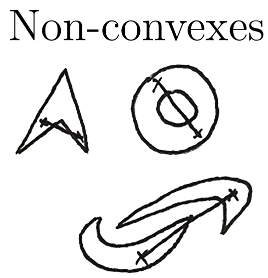


FIGURE 3.3 – Figures concaves

Ensemble compact

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact s'il est fermé et borné. C'est le cas de l'intervalle $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$, mais pas de l'intervalle $]-\infty;1]$ qui est non borné ou de l'intervalle $]0\,;1]$ qui est ouvert à gauche.

3.2.2 Démonstration

Pour simplifier la démarche, nous avons ici pris un intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$. Ceci respecte les hypothèses de départ du théorème.

Si nous avons une fonction f quelconque sur $[a;b]$, nous pouvons définir une fonction g comme étant :

$$g(x) = f(x) - x$$

Notre éventuel point fixe de f sur $[a;b]$ devient donc un zéro de g sur $[a;b]$. Il nous suffit donc maintenant de prouver l'existence d'un zéro de g sur l'intervalle $[a;b]$.

Si notre fonction g répond aux hypothèse du théorème de Bolzano sur cet intervalle, nous pouvons prouver l'existence de ce zéro. Pour ce faire, il suffit que $g(a) \cdot g(b) \leqslant 0$ et que g soit continue.

Prenons d'abord $g(a) = f(a) - a$. Du fait que l'ensemble des valeurs de f soit $[a;b]$, $f(a) \geqslant a$. Par conséquent, $g(a) \geqslant 0$. De manière analogue, nous pouvons conclure que $g(b) \leqslant 0$ car $f(b) \leqslant b$. Le produit de $g(a)$ et de $g(b)$ est donc bel et bien inférieur ou égal à zéro, ce qui respecte une hypothèse de Bolzano et g est continue du fait qu'elle soit soustraction de deux fonctions elles aussi continues. Le théorème de Bolzano est donc applicable et, par conséquent, il existe un zéro de g dans l'intervalle $[a;b]$!

Comme g a un zéro dans l'intervalle $[a; b]$, f a un point fixe dans ce même intervalle.

□

Quand la « best response function » satisfait les hypothèses, elle a donc elle aussi un point fixe et par conséquent il y a un équilibre de Nash. Le problème est que le théorème de Brouwer ne s'applique qu'au fini et non à l'infini, contrairement à la « Best response function » qui peut être utilisé pour une infinité de stratégies. Il serait donc intéressant d'aller vérifier l'existence des points fixes à l'infini grâce à un autre théorème.

3.3 Le théorème du point fixe de Kakutani

Hypothèses

Soit :

(a) Un ensemble S convexe et compact dans $\mathbb{R}^n$

(b) $B : S \to 2^S$
$S \ni x \mapsto B(x) \subset S$

(c) B est hémicontinue supérieurement : $\forall$ ouvert $w \in 2^S, \{x \in S | B(x) \subset w\}$ est ouvert

Thèse

$\exists x \in S | x \in B(x)$

3.3.1 Démonstration sur l'intervalle [0 ;1]

Dans cette partie, nous allons vous présenter une démonstration du théorème de Kakutani sur un ensemble qui est l'intervalle [0 ;1] de la droite des réels. L'idée principale de la démarche à n-dimensions est la même mais nous ne la présenterons pas entièrement car très complexe.

La démonstration sera aussi assortie de schémas pour aider à la compréhension.

Preuve

Pour commencer nous allons définir quatre suites qui devront respecter des conditions importantes pour la suite de la démonstration et notre intervalle $S = [0; 1]$:

a_i, b_i, p_i, q_i sont des suites convergentes dans S, $i \in \mathbb{N}$

$$a_i \geqslant 0 \tag{3.1}$$

$$b_i \leqslant 1 \tag{3.2}$$

$$a_i < b_i \tag{3.3}$$

$$(b_i - a_i) \leqslant 2^{-i} \tag{3.4}$$

$$p_i \in B(a_i) \tag{3.5}$$

$$q_i \in B(b_i) \tag{3.6}$$

$$p_i \geqslant a_i \tag{3.7}$$

$$q_i \leqslant b_i \tag{3.8}$$

Nous allons prouver par récurrence qu'il est possible de choisir une suite qui respecte ces conditions à chaque étape, il nous faut donc un ancrage. Prenons-en un avec i=0 :

(a) $a_0 = 0$

(b) $b_0 = 1$

(c) $p_0 \in B(0) \Rightarrow p_0 \geqslant a_0$

(d) $q_0 \in B(1) \Rightarrow q_o \leqslant b_0$

Ce qui remplit les conditions 3.1 à 3.8

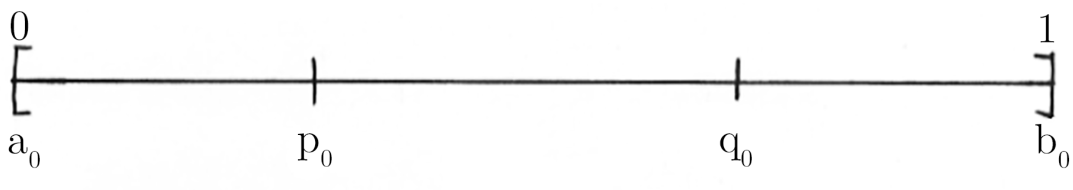


FIGURE 3.4 – Etape 0

Il faut maintenant vérifier que les conditions soient respectées dans les étapes suivantes où nous allons utiliser une méthode semblable à la bissection.

Nous définissons $m_i = \frac{a_i+b_i}{2}$

Si ∃ r | r ∈ $B(m_i)$ et que $r \geqslant m_i$, alors nous définissons :

(a) $a_{i+1} = m_i$

(b) $b_{i+1} = b_i$

(c) $p_{i+1} = r$

(d) $q_{i+1} = q_i$

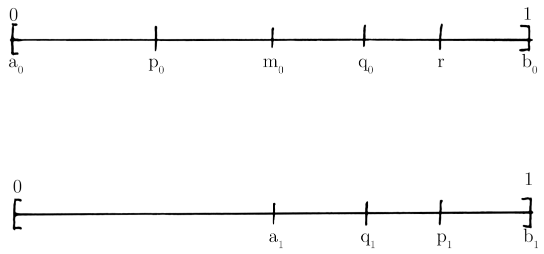


FIGURE 3.5 – Etape 1

Ce qui remplit les conditions 3.1 à 3.8

Sinon ∃ s | s ∈ $B(m_i)$ et que $s \leqslant m_i$

Alors nous définissons :

(a) $a_{i+1} = a_i$

(b) $b_{i+1} = m_i$

(c) $p_{i+1} = p_i$

(d) $q_{i+1} = s$

Ce qui remplit les conditions 3.1 à 3.8

Nous avons donc démontré l'existence d'une suite remplissant les contraintes 3.1 à 3.8

Comme B(x) et S sont des ensembles compacts (hypothèse (a)) il existe une sous-suites à a_i, b_i, p_i, q_i convergentes. Et comme nous utilisons la méthode de la bissection, nous pouvons affirmer que

$$\lim_{k \to +\infty} a_{i(k)} = a^*; \lim_{k \to +\infty} b_{i(k)} = b^*$$

$$a^* - b^* = \lim_{k \to +\infty} (a_{i(k)} - b_{i(k)}) = 0 \Rightarrow a^* = b^*$$

$$\lim_{k \to +\infty} p_{i(k)} = p^* \geqslant a^*; \lim_{k \to +\infty} q_{i(k)} = q^* \leqslant b^*; x = a^* = b^* \Rightarrow B(x) \ni q^* \leqslant x \leqslant p^* \in B(x)$$

Finalement, si $q^* = p^* \Rightarrow x \in B(x)$, sinon $x \in B(x)$ par la convexité de $B(x)$.

□

Quand la « Best-response function » satisfait les hypothèses, ce théorème prouve toujours l'existence d'un équilibre de Nash. Cependant, un équilibre peut tout de même exister si ces hypothèses ne sont pas respectées.

[21]

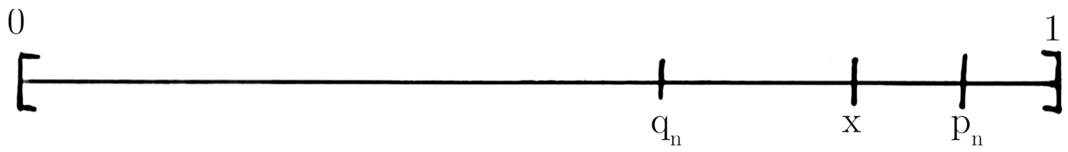


FIGURE 3.6 – Etape finale

3.3.2 Quelques considérations à n-dimensions

Nous allons ici évoquer certains aspects de la démonstration sans pour autant l'aborder dans son entier, car elle aborde des concepts trop compliqués. Une démonstration à une dimension sera tout de même réalisée dans la partie suivante.

Avant de commencer, il faut savoir que tout cas à n-dimensions peut être rapporté au cas d'un simplexe, qui est une généralisation du triangle à n-dimensions [15]. Nous allons donc ici faire le lien entre le cas du simplexe et celui précédemment démontré.

Dimension 1	**Dimensions n**
Séparation de l'intervalle en 2	Subdivision barycentrique
Choix du sous-ensemble approprié selon m ou s (cf. p.43)	Lemme de Sperner

FIGURE 3.7 – Comparaison entre 1 et n dimensons

En effet, la subdivision barycentrique va permettre de diviser notre ensemble en des sous-ensembles toujours plus petits. Puis, grâce au lemme de Sperner il serait possible de définir un sous-ensemble approprié. Celui-ci affirme que, pour toute triangulation d'un simplexe de n dimensions dont on colorie chaque sommet d'une couleur parmis les n+1 possibles, il y aura toujours une des cellules avec ses sommets colorés des n+1 couleurs, sous plusieurs hypothèses :

(a) Chaque sommet du simplexe doit être d'une couleur différente

(b) Chaque sommet sur un des côtés du simplexe est de la même couleur qu'un des sommets délimitant ce côté

[Gou17]

Malheureusement, nous n'avons trouvé aucune démonstration simple qui expliquerait l'utilité du lemme de Sperner. [21]

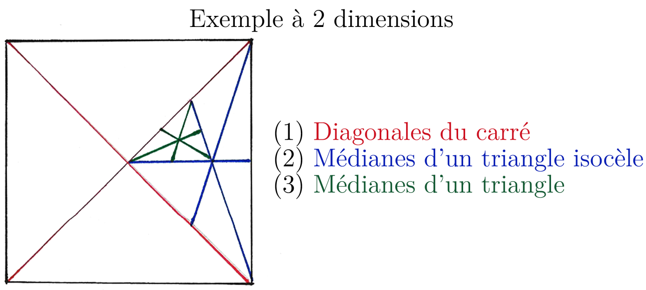


FIGURE 3.8 – Subdivisions barycentriques

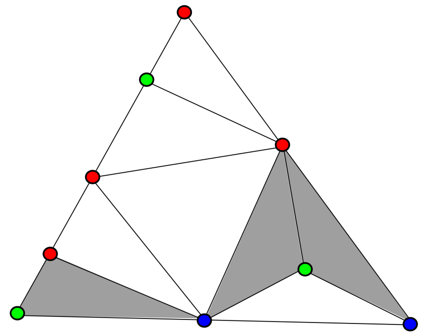


FIGURE 3.9 – Le lemme de Sperner en deux dimensions [24]

3.4 L'exemple du duopole de Cournot

La résolution de cet exemple est tirée du livre de Drew Fudenberg et Jean Tirole. [FT91]

Un exemple populaire de la théorie des jeux est celui du duopole de Cournot, ou « Cournot competition » en anglais. Deux entreprises sont en compétition directe sur la vente d'un certain produit et ont le duopole total de ce marché. Pour $i \in \{1, 2\}$, chaque entreprise produit une quantité de l'objet $q_i \in Q_i = [0; \infty]$ qu'elle vend à un prix $p(q)$ qui dépend de la production des entreprises, et où $q = q_1 + q_2$. De plus, chaque entreprise a un coût de production total défini comme $c_i(q_i)$. Cela va donc de soi que le gain net de chaque entreprise i - sa « Pay-off function » - est :

$$u_i(q_{-i}, q_i) = q_i p(q) - c_i(q_i) \tag{3.9}$$

Dans un cas comme celui-ci, il est logique d'exprimer la quantité qu'une entreprise devrait produire pour maximiser son profit en fonction de ce que l'autre produit. On définit ces fonctions comme $r_1 : Q_2 \to Q_1$ et $r_2 : Q_1 \to Q_2$, car n'importe quelle stratégie $q^*_{-i} \in Q_{-i}$ définit une nouvelle stratégie, $r(q^*_{-i}) \in Q_i$. Le profit maximal de l'entreprise i dans ce cas-là est donc

$$u_i(q^*_{-i}, r_i(q^*_{-i})) = r_i(q^*_{-i})p(q) - c_i(r_i(q^*_{-i})) = r_i(q^*_{-i})p(q^*_{-i} + r_i(q^*_{-i})) - c_i(r_i(q^*_{-i})) \tag{3.10}$$

Ensuite, pour connaître le profit maximum qu'une entreprise peut faire en fonction de la stratégie de l'autre, il suffit de calculer les extremums de la « Pay-off function ». Pour simplifier les notations, concentrons-nous sur l'entreprise 2 avec $q^*_1 \in Q_1$ comme étant la stratégie de l'entreprise 1. On pose comme hypothèses que $u_2(q^*_1, r_2(q^*_1))$ est dérivable en tout point, concave (pour avoir un maximum) et que $r_2(q_1^*) \in Q_2$. Trouver les extrema consiste à résoudre à l'équation $u_2'(q_1^*, r_2(q_1^*)) = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_2} u_2(q_1^*, q_2) &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_2}[q_2 p(q_1^* + q_2)] - \frac{\partial}{\partial q_2}[c_2(q_2)]\bigg|_{q_2 = r_2(q_1^*)} &= 0 \\
\Leftrightarrow r_2'(q_1^*) p(q_1^* + r_2(q_1^*)) + p'(q_1^* + r_2(q_1^*)) r_2(q_1^*) - c_2'(r_2(q_1^*)) &= 0 \\
\Leftrightarrow p(q_1^* + r_2(q_1^*)) + p'(q_1^* + r_2(q_1^*)) r_2(q_1^*) - c_2'(r_2(q_1^*)) &= 0 \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Pour trouver un équilibre de Nash, il faut donc trouver un couple de stratégie pour lequel chaque stratégie q_i est la stratégie optimale à jouer en fonction de q_{-i}, donc que $u_1'(q_2, r_1(q_2)) = 0$ et $u_2'(r_1(q_2), q_2) = 0$. Dans un contexte purement algébrique, ce système d'équations ne peut pas résolu, car les fonctions $p(q)$ et $c_i(q_i)$ ne sont pas définies, et il n'est donc pas possible de trouver la valeur de leurs dérivées. Cependant, dans un contexte réel, elles peuvent être définies assez facilement, car l'entreprise connaît le coût de production ainsi que le prix auquel elle vend ses produits.

Par exemple, pour une demande linéaire (c'est-à-dire qu'il y a une relation de linéarité entre le prix et la quantité produite globale, exprimée $p(q) = max(0, 1-q)$) ainsi qu'un coût de production linéaire $c_i(q_i) = cq_i$ (pour $0 \leqslant c \leqslant 1$, afin d'assurer une possibilité de profit), on peut trouver la valeur algébrique de $r_2(q_1^*)$ par 3.11 :

$$\begin{aligned}
p(q_1^* + r_2(q_1^*)) + p'(q_1^* + r_2(q_1^*)) r_2(q_1^*) - c_2'(r_2(q_1^*)) &= 0 \\
\Leftrightarrow p(q) + p'(q) r_2(q_1^*) - c &= 0 \\
\Leftrightarrow 1 - q - r_2(q_1^*) - c &= 0 \\
\Leftrightarrow 1 - (q_1^* + r_2(q_1^*)) - c &= r_2(q_1^*) \\
\Leftrightarrow 1 - q_1^* - c &= 2r_2(q_1^*) \\
\Leftrightarrow r_2(q_1^*) &= \frac{1 - q_1^* - c}{2}
\end{aligned}$$

Notons que notre p(q) dans ces équations est plus simple que celui défini précédemment : la formule $max(0, 1-q)$ est simplifiée en 1-q pour une raison simple. Lorsque la quantité totale produite atteint 1, le prix est de 0. Toute quantité supplémentaire produite n'a aucune influence sur le prix. Or, en produisant plus, les coûts de production augmentent. Il serait donc absurde de produire en tout plus que 1. Ce « *max* » qui était embêtant pour la résolution de l'équation peut donc disparaître. De manière analogue, on peut trouver que $r_1(q_2^*) = \frac{1-q_2^*-c}{2}$. À partir de cela, nous pouvons trouver les quantités produites par chaque entreprise à l'équilibre ($\tilde{q}_1$ et $\tilde{q}_2$) ! En effet, $\tilde{q}_2 = r_2(\tilde{q}_1)$ et $\tilde{q}_1 = r_1(\tilde{q}_2)$, on peut remplacer dans l'équation de $\tilde{q}_1$ notre $\tilde{q}_2$ pour arriver à une équation à une inconnue, pour trouver $\tilde{q}_1$:

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_1 &= r_1(r_2(\tilde{q}_1)) = \frac{1 - r_2(\tilde{q}_1) - c}{2} \\
\tilde{q}_1 &= \frac{1 - \frac{1-\tilde{q}_1-c}{2} - c}{2} = \frac{2 - (1 - \tilde{q}_1 - c) - 2c}{4} \\
4\tilde{q}_1 &= 1 + \tilde{q}_1 - c \\
3\tilde{q}_1 &= 1 - c \\
\tilde{q}_1 &= \frac{1-c}{3}
\end{aligned}$$

Et, en appliquant cette valeur à la formule de r_2, on trouve $\tilde{q}_2$ soit $\tilde{q}_2 = r_2(\tilde{q}_1) = \frac{1-\frac{1-c}{3}-c}{2} = \frac{1-c}{3} = r_1(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_1$.

Bien que l'on trouve un équilibre de Nash pour ce duopole selon ces fonctions particulières, celui-ci ne remplit cependant pas toutes les hypothèses de Kakutani : certes, les hypothèses (b) et (c) sont remplies, mais l'ensemble de stratégies S étant $[0; +\infty[\times[0; \infty[$, il n'est pas compact. On remarque donc que certaines de ces hypothèses ne sont pas forcément nécessaires, mais elles sont par contre suffisantes pour garantir l'existence d'un point fixe, donc d'un équilibre de Nash.

[FT91]

3.5 Les problèmes de la théorie des jeux

De nombreux problèmes se présentent dans la théorie des jeux. Déjà, bien qu'elle donne une solution, cela ne veut pas dire que c'est toujours la meilleure solution. En effet, il peut y avoir certains cas où une combinaison de stratégies donnerait un gain plus élevé si les joueurs coopéraient. Cependant, elle donne une solution probable car elle permet à tous les joueurs d'assurer un certain gain quelle que soit la stratégie des autres. Dans notre exemple, il est en effet aussi possible d'atteindre les mêmes profits si chacun produisait 50 cookies, mais en produire 150 est plus sûr car, peu importe ce que les autres jouent, $333.\overline{3}$ CHF sont au minimum gagnés.

De plus, une des plus grandes difficultés dans la théorie des jeux est d'établir les « pay-off functions ». Il est difficile de prendre tous les critères en compte et, dans bien des cas, de réussir à quantifier des concepts abstraits. Dans notre exemple, il y a abstraction de certains critères. Le prix de production du cookie n'est par exemple pas pris en compte. S'il intervenait dans le calcul, une quantité faible de cookies serait plus favorisée car le coût serait réduit. De plus, il faut aussi penser au prix que les acheteurs seraient d'accord de mettre. En effet, si les trois joueurs décidaient de ne faire que 50 cookies, ils se vendraient à plus de 6 CHF la pièce, ce qui est absolument disproportionné !

Si, dans notre cas, on implémentait un coût de 50 centimes par cookie, voici à quoi ressemblerait notre situation :

Si Alice choisit 50

		Choix de Bob		
		50	100	150
Choix de Cédric	50	308.33,308.33,308.33	225.0,450.0,225.0	175.0,525.0,175.0
	100	225.0,225.0,450.0	175.0,350.0,350.0	141.67,425.0,283.33
	150	175.0,175.0,525.0	141.67,283.33,425.0	117.86,353.57,353.57

Si Alice choisit 100

		Choix de Bob		
		50	100	150
Choix de Cédric	50	450.0,225.0,225.0	350.0,350.0,175.0	283.33,425.0,141.67
	100	350.0,175.0,350.0	283.33,283.33,283.33	235.71,353.57,235.71
	150	283.33,141.67,425.0	235.71,235.71,353.57	200.0,300.0,300.0

Si Alice choisit 150

		Choix de Bob		
		50	100	150
Choix de Cédric	50	525.0,175.0,175.0	425.0,283.33,141.67	353.57,353.57,117.86
	100	425.0,141.67,283.33	353.57,235.71,235.71	300.0,300.0,200.0
	150	353.57,117.86,353.57	300.0,200.0,300.0	258.33,258.33,258.33

FIGURE 3.10 – Situation des cookies avec un prix de 0.50 CHF

Dans ce cas, l'équilibre se trouve de nouveau quand les trois font 150 cookies, alors que le résultat lorsqu'ils en font chacun 50 est largement meilleur. Mais puisqu'ils ne peuvent pas se parler, ils ont meilleur temps d'en produire 150 (pour que chacun s'assure le meilleur résultat).

En outre, si l'on poussait les coûts à l'extrême et disait que chaque cookie coûte 2.50 CHF à produire, le jeu serait plus problématique :

Si Alice choisit 50

		Choix de Bob		
		50	100	150
Choix de Cédric	50	208.33,208.33,208.33	125.0,250.0,125.0	75.0,225.0,75.0
	100	125.0,125.0,250.0	75.0,150.0,150.0	41.67,125.0,83.33
	150	75.0,75.0,225.0	41.67,83.33,125.0	17.86,53.57,53.57

Si Alice choisit 100

		Choix de Bob		
		50	100	150
Choix de Cédric	50	250.0,125.0,125.0	150.0,150.0,75.0	83.33,125.0,41.67
	100	150.0,75.0,150.0	83.33,83.33,83.33	35.71,53.57,35.71
	150	83.33,41.67,125.0	35.71,35.71,53.57	0,0,0

Si Alice choisit 150

		Choix de Bob		
		50	100	150
Choix de Cédric	50	225.0,75.0,75.0	125.0,83.33,41.67	53.57,53.57,17.86
	100	125.0,41.67,83.33	53.57,35.71,35.71	0,0,0
	150	53.57,17.86,53.57	0,0,0	-41.67,-41.67,-41.67

FIGURE 3.11 – Situation des cookies avec un prix de 2.50 CHF

L'équilibre n'est plus évident comme il l'était auparavant, car il n'y a pas de stratégie strictement dominante pour chaque joueur. En effet, produire 100 cookies est optimal quand les autres en produisent peu (jusqu'à 200 entre les deux). Cependant, en produire 50 devient plus rentable si les autres en font beaucoup. Il est donc difficile de prédire rationnellement ce qui devrait se passer : on se retrouve par conséquent dans une situation où cette théorie des jeux ne peut pas être utilisée, car il n'y a pas d'équilibre. Mais il y a tout de même de nombreux cas réels où elle peut être mise en place.

3.6 Les applications de la théorie des jeux

La théorie des jeux a naturellement plusieurs applications dans la réalité car elle n'est pas que théorique.

Nous avons par exemple évoqué, dans la biographie (1.3.2), son utilisation par la RAND Corporation dans le cadre des négociations durant la guerre froide qui peut se rapporter aux sciences politiques. Mais il y a naturellement d'autres utilisations comme en biologie évolutive, en philosophie, en sciences sociales, en histoire et bien entendu en économie, raison pour laquelle John Nash obtint son prix Nobel ! [Nas01]

Dans cette partie, nous allons parler des applications que peut avoir la théorie des jeux dans différentes sciences au travers d'exemples concrets.

3.6.1 Théorie des enchères (économie)

Avant de commencer avec la théorie des enchères, nous vous renvoyons à l'exemple utilisé dans la partie 3.1.1 qui concerne déjà l'économie avec la vente de cookies.

La situation qui est ici présentée concerne un type d'enchères précis : l'enchère de Vickrey. Sa particularité se trouve dans le fait que tous les acheteurs choisissent un prix secrètement et le révèlent en même temps. Celui qui annonce la plus haute somme achète l'objet au prix de la deuxième plus haute enchère. Il n'y a naturellement qu'un seul tour.

Nous pouvons donc nous demander quelle est la meilleure stratégie à adopter dans cette situation pour remporter l'enchère. Pour ce faire, il est important de définir pour combien nous serions prêts à acheter l'objet au maximum. Nous appellerons ce prix notre « vrai prix ».

Nous avons donc 3 stratégies à disposition :

(a) Annoncer une enchère supérieure à notre « vrai prix »

(b) Annoncer notre « vrai prix »

(c) Annoncer une enchère inférieure à notre « vrai prix »

Si nous analysons ces possibilités, nous pouvons en déduire que si nous choisissons la (a), nous avons plus de chances de gagner. Cependant, si un autre acheteur annonce son enchère entre notre « vrai prix » et notre enchère, l'objet sera acheté à perte. Ceci est un point extrêmement négatif.

Si nous choisissons la stratégie (c), nous avons plus de chances de faire un profit en achetant en dessous de notre « vrai prix » mais nous avons moins de chances de gagner.

Par conséquent, la possibilité (b) est la plus intéressante puisque nous maximisons nos chances de gagner tout en s'assurant d'acheter avec un certain profit car, si nous gagnons, nous payerons forcément moins que notre « vrai prix ».

[18]

3.6.2 Biologie évolutive

La plus importante théorie concernant l'évolution aujourd'hui est bien entendu la sélection naturelle de Darwin. Et elle peut être expliquée avec la théorie des jeux !

Il nous suffit de définir un ensemble S de 2 stratégies : A (ancienne) et N (nouvelle) ainsi qu'un ensemble de joueurs I qui est, par exemple, une population de fennecs. Au départ tous les fennecs jouent la stratégie A car elle fait partie de l'équilibre de Nash, maximisant ainsi leurs chances de survie. Mais un jour, une mutation va permettre à ces fennecs de débloquer une nouvelle stratégie N qui est meilleure que A. Ainsi l'équilibre sera modifié et les fennecs pouvant choisir N le feront. Petit à petit tous les fennecs joueront N et A disparaîtra. Voici comment la théorie des jeux peut expliquer la sélection naturelle.

Dans le cas de la biologie évolutive, nous pouvons aussi parler de stratégies évolutivement stables (SES). Une stratégie évolutivement stable est simplement une stratégie N qui ne peut pas être surpassée ou envahie par une stratégie λ. Elle reste donc majoritaire.

[17]

3.6.3 Histoire

Lors de nos recherches, nous sommes tombés sur un article paru dans la revue *Tangente, l'aventure mathématique : L'apport des vecteurs (numéro 144)* [Mon12] écrit par Philippe Mongin. Il y utilise la théorie des jeux pour expliquer une partie de la bataille de Waterloo qui a opposé Napoléon I^{er} et le général prussien Blücher en juin 1815. C'est un exemple très intéressant, c'est pourquoi nous allons le reprendre dans cette partie.

Napoléon avait 3 stratégies à disposition pour marcher sur les troupes hollando-anglaises le 17 juin 1815 :

S1 : Marcher en direction des Hollando-Anglais avec toute son armée

S2 : Marcher en direction des Hollando-Anglais avec son aile gauche et envoyer le général Grouchy avec l'aile droite intercepter Blücher et son armée

S3 : Marcher en direction des Hollando-Anglais avec son aile gauche et envoyer le général Grouchy avec l'aile droite à la poursuite de Blücher et son armée

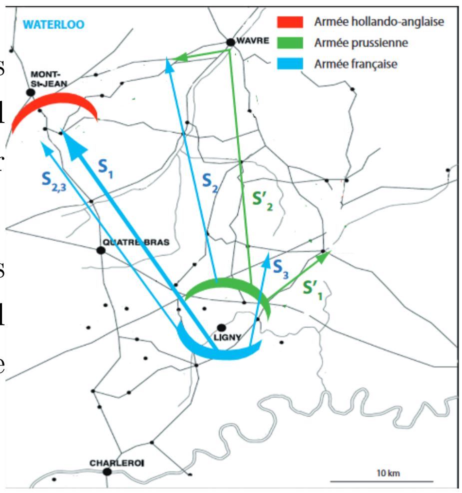


FIGURE 3.12 – Stratégies des généraux [Mon12]

De son côté, Blücher à 2 possibilités :

S'1 : Partir à l'est et retourner en Allemagne

S'2 : Partir au nord pour rejoindre les Hollando-Anglais

D'un point de vue historique, Blücher a choisi la stratégie S'2 car il n'était que peu affaibli par sa défaite face à Napoléon. Il a d'ailleurs choisi la meilleure stratégie compte tenu de sa situation. Mais cela devient bien plus intéressant lorsque nous regardons le choix fait par les Français. En effet, dans le *Mémorial à Saint-Hélène* (mémoires de Napoléon), il est dit que l'Empereur français a commandé à Grouchy la stratégie S2, alors que dans les *Mémoires du maréchal de Grouchy* il est écrit que Napoléon a commandé la stratégie S3 ! Il faut savoir que ces versions sont respectivement reprises l'une par l'école française et l'autre par l'école prussienne. Nous n'avons malheureusement pas de documents historiques permettant de trancher la question et de connaître la vérité.

3.7 Et Von Neumann ?

John Von Neumann (1903-1957) est un mathématicien ayant, entre autre, travaillé sur la théorie des jeux. Il a publié avec Oskar Morgenstern *Theory of Games and Economic Behaviour* en 1944. Nous savons qu'il a eu une rivalité assez forte avec John Nash [Nas01] et c'est pourquoi nous allons ici faire une comparaison entre la théorie des jeux selon Von Neumann et la théorie des jeux selon Nash.

Premièrement, malgré le fait que les deux hommes étaient de grands rivaux, leurs travaux sont en de nombreux points comparables. Nous pouvons même affirmer que les travaux de Nash sont une évolution, un approfondissement de ceux de Von Neumann [Sch95]. En effet, tous leurs travaux s'insèrent dans la continuité et l'évolution de la théorie des jeux qui prend en compte leurs prédécesseurs et successeurs. Nash est d'ailleurs un successeur de Von Neumann qui était déjà un mathématicien influent à Princeton à l'époque où Nash y étudiait. Ceci se ressent dans la façon d'aborder la théorie des jeux que nous avons utilisée jusqu'alors dans ce travail. Von Neumann avait déjà eu l'idée des « Pay-off functions » qui servaient à calculer les gains (ou pertes) pour un joueur en fonction des choix de tous. Dans notre travail, des tableaux ont été utilisés pour représenter ces gains ou pertes. Quant à lui,Von Neumann utilisait des matrices (une par joueur), ce qui était très pratique car il n'analysait que des situations à 2 joueurs. De surcroît, il y a une autre différence marquante avec la théorie de Nash. En effet, Von Neumann ne prenait en compte que des jeux à somme nulle (3.1.3).

[NJ96]

Il est intéressant de constater que les deux révolutions majeures apportées par Von Neumann et Nash dans leurs travaux respectifs ont un lien très étroit. En effet, l'équilibre de Nash peut être vu comme une généralisation du théorème du minimax de Von Neumann. L'équilibre de Nash peut être défini comme le cas dans lequel aucun des joueurs n'a intérêt à changer sa stratégie (3.1.6). En revanche, le théorème du minimax peut être défini comme le cas dans lequel aucun des deux joueurs n'a intérêt à changer de stratégie si son adversaire ne change pas non plus. Dans le théorème du minimax, on part du principe qu'un joueur veut avant tout perdre le minimum. De ce fait, le joueur va allez chercher pour chacune de ses stratégies la stratégie adverse lui faisant perdre le plus, car il part du principe que son adverse veut gagner le plus possible. Parmi les paires de stratégies retenues, il va vouloir jouer celle où il perd le moins, ceci se ramène à chercher son « maximin ». En effet, il cherche le maximum de ses minima (car ce qu'il perd est en négatif). De manière analogue, l'adversaire va lui aussi rechercher son « maximin », mais ce dernier est le « minimax » sur un tableau désignant les gains du premier joueur ! L'équilibre à donc lieu quand le « minimax » et le « maximin » des joueurs sont les mêmes ! Sinon, les joueurs ne choisissent pas la même paire de stratégie de base et vont donc constamment changer pour minimiser les pertes ou maximiser le gain.

Les différences avec théorème de Nash sont les suivantes :

(i) Le théorème du minimax ne s'applique qu'à deux joueurs dans le cas de jeux à somme nulle alors que l'équilibre de Nash s'applique dans tous les cas

(ii) Chez Von Neumann, il ne peut y avoir ni coopération, ni égalité

(iii) Il existe plus de « points d'équilibres » chez Von Neumann que chez Nash car ce dernier prend en compte les possibilités et la situation en général alors que Von Neumann ne prend en compte que l'une des stratégies adverses à la fois. Si un adversaire change de stratégie, le « point d'équilibre » change aussi

Il faut cependant faire attention avec ce dernier point. La théorie de Von Neumann utilise aussi la théorie des stratégies dominantes pour trouver le meilleur « point d'équilibre » mais, si un joueur décide de ne pas suivre cette théorie, le point va changer, ce qui n'est pas le cas chez Nash. Ceci n'empêche pas que, si nous faisons une analyse d'une situation dans laquelle les deux théorèmes s'appliquent, les résultats seront sûrement similaires.

3.8 Analyse du sondage sur la théorie des jeux

3.8.0 Introduction

Lors de notre travail de maturité, il était important de mettre cette théorie des jeux en action, c'est pourquoi nous avons créé un sondage. Le but de celui-ci est de pouvoir poser certaines questions en lien avec la théorie des jeux à un nombre suffisant de personnes pour voir si les résultats sont en majorité sur l'équilibre de Nash de la situation.

En tout, quatre questions sur la théorie des jeux ont été posées :

1. Deux joueurs s'affrontent dans un jeu où 1000 CHF sont à gagner. Ils peuvent soit partager, soit tout prendre. Si les deux décident de partager, alors chacun reçoit 500 CHF. Si un seul choisit de tout prendre, alors celui-ci reçoit seul les 1000 CHF. Mais si les deux décident de tout prendre, personne ne gagne quoi que ce soit. [14]

2. La même situation est remise en place, avec quelques modifications. Cette fois, trois joueurs sont présents, 1500 CHF sont en jeu et, dans le cas où un seul joueur décide de partager, il reçoit les 1500 CHF comme si un seul décidait de tout prendre.

3. Dans cette troisième situation, chaque joueur possède trois stratégies. Il s'agit d'un jeu ou chaque joueur reçoit ou perd un certain nombre de points par rapport aux choix des deux joueurs. La personne répondant au sondage a à disposition les choix « Voler l'autre », « Partager » ou « Voler double », alors que le deuxième joueur peut voler la moitié, partager ou voler l'autre. Le calcul des points gagnés ou perdus par chaque joueur n'est pas détaillé, seuls les résultats de chaque paire de stratégies ont été notés.

4. De nouveau, la même situation est reprise, sauf que l'on fixe le choix du deuxième joueur sur la stratégie « Voler moitié »

En outre, un tableau résumant chaque situation était mis à disposition des lecteurs et chaque personne ayant répondu a dû communiquer son âge ainsi que si elle connaissait la théorie des jeux.

3.8.1 Résultats du sondage

Pour chaque question, les résultats sont séparés entre ceux qui connaissaient la théorie des jeux et ceux qui ne la connaissaient pas. En tout, 83 personnes ont répondu, 13 d'entre elles connaissant la théorie des jeux.

Première question

L'énoncé exact était le suivant :

Que faites-vous dans cette situation ? Vous jouez face à un autre joueur (Alice). Chaque joueur peut choisir soit de partager 1000 CHF avec l'autre soit de tout prendre. Vous dévoilez votre choix au même moment. Le tableau ci-dessous désigne les résultats suivant le choix de chaque joueur. Si chacun décide de partager, chacun gagne 500 CHF. Si chacun décide de tout prendre, personne ne gagne. Si un joueur décide de tout prendre et l'autre de partager, le premier gagne 1000 CHF.

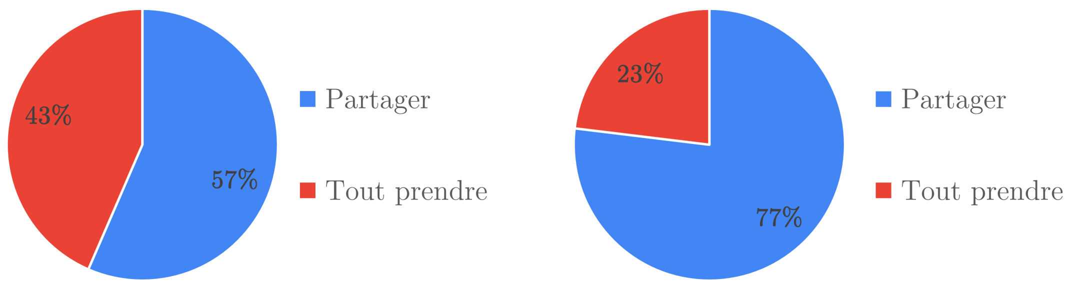
Voici le tableau qui était mis à disposition :

		Vous	
		Partager	Tout prendre
Alice	Partager	Chacun gagne 500 CHF	Vous gagnez les 1000 CHF
	Tout prendre	Alice gagne 1000 CHF	Personne ne gagne

FIGURE 3.13 – Tableau de la première situation

Dans ce cas, l'équilibre se trouve lorsque les deux joueurs choisissent de tout prendre. Si l'on se concentre sur les gains du joueur (lecteur), lorsqu'Alice choisit de partager, il gagne plus en prenant tout. Et lorsqu'Alice prend tout, son choix n'a aucune influence sur ses gains. Il a donc meilleur temps de tout prendre. Une réflexion analogue peut être posée pour Alice.

Pour cette situation, nous avions posé le pronostic que la plupart allaient choisir de partager car l'équilibre n'est pas assez évident pour être choisi. En effet, personne ne gagne rien à l'équilibre. En outre, il y a plus de gains globaux si le lecteur partage. Ceux-ci sont l'addition des gains possibles pour les deux joueurs selon le choix du lecteur. Donc, ici, si le lecteur partage, les gains globaux sont de 2000 CHF, alors que s'il prend tout, ils ne sont que de 1000 CHF.



(a) Non-familier (b) Familier

FIGURE 3.14 – Première question

En général, le public a décidé de partager. De plus, l'équilibre est un peu mieux respecté par ceux qui ne connaissaient pas la théorie des jeux, étonnament.

Deuxième question

L'énoncé exact était le suivant :

Que faites-vous dans cette situation ? Les choix sont les mêmes que dans la situation précédente mais il y a 3 joueurs (Alice, Bob et vous) et 1500 CHF à la clé. Les tableaux ci-dessous représentent les résultats suivant les choix des joueurs. Si un seul joueur joue « prend tout » ou « partager » il gagne les 1500 CHF.

Voici le tableau qui était mis à disposition :

Si Bob partage

		Vous	
		Partager	Tout prendre
Alice	Partager	Chacun gagne 500 CHF	Vous gagnez 1500 CHF
	Tout prendre	Alice gagne 1500 CHF	Bob gagne 1500 CHF

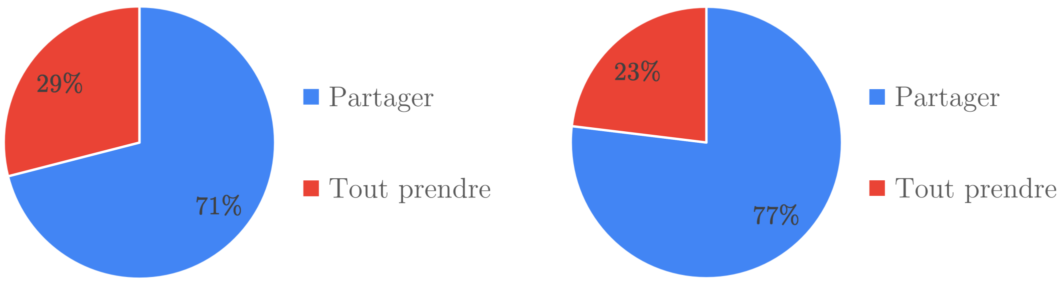
Si Bob prend tout

		Vous	
		Partager	Tout prendre
Alice	Partager	Bob gagne 1500 CHF	Alice gagne 1500 CHF
	Tout prendre	Vous gagnez 1500 CHF	Personne ne gagne

FIGURE 3.15 – Tableau de la deuxième situation

D'un point de vue statistique (si l'on part du principe que les choix de Bob et Alice sont aléatoires), le lecteur a intérêt à partager. La même réflexion peut être faite pour les autres joueurs, ce qui nous mène à une situation où tout le monde partage. Mais, si les 3 partagent et que l'un d'entre eux change pour tout prendre, il gagne plus ! Ce n'est donc pas un équilibre. La réflexion inverse peut se faire si chacun prend tout. Il n'y a donc aucun équilibre dans cette situation car, quel que soit la combinaison de stratégies, il y a au minimum un joueur qui a intérêt à changer de choix.

Cependant, si l'on regarde les valeurs présentes dans les deux tableaux, le total est plus élevé dans le cas où Bob partage. Dans la même logique, si l'on faisait les tableaux en fonction d'Alice ou du joueur, les valeurs seraient aussi supérieures s'ils choisissaient de partager. Il est donc probable d'arriver à un cas où tout le monde partage.



(a) Non-familier

(b) Familier

FIGURE 3.16 – Deuxième question

Le pronostic que nous avions posé suit la logique proposée précédemment, et nous avions donc attribué à la majorité le choix du partage qui est en effet préféré par les trois quarts des participants.

Troisième question

L'énoncé exact était le suivant :

Dans cette dernière situation, Alice et Bob jouent à un jeu où le but est de récolter des points mais chaque action coûte des points selon les tableaux ci-dessous. ATTENTION, les coûts ne sont pas pris en compte dans ces tableaux, ce sont les gains bruts. Que faites-vous si vous êtes Alice ?

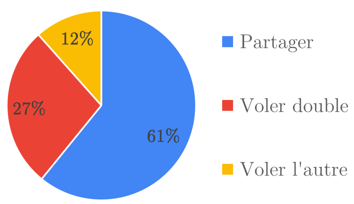
Voici le tableau qui était mis à disposition :

		Bob		
		Voler la moitié	Partager	Voler l'autre
Alice	Voler l'autre	Alice perd 4 Bob ne gagne rien	Alice perd 6 Bob gagne 3	Alice gagne 2 Bob perd 2
	Partager	Alice gagne 1 Bob perd 3	Personne ne gagne	Alice gagne 4 Bob perd 8
	Voler double	Alice perd 2 Bob gagne 1	Alice perd 6 Bob gagne 3	Alice gagne 10 Bob ne gagne rien

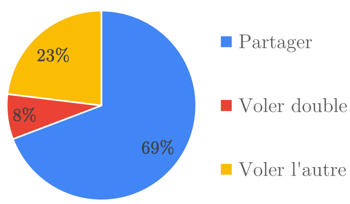
FIGURE 3.17 – Tableau de la troisième situation

Après avoir envoyé le sondage et lu les remarques, une erreur a été décelée : la consigne parle de coûts, qui sont introuvables sur le tableau. Durant la création du sondage, nous avions pris la décision de les introduire directement dans les gains, sans pour autant changer la consigne.

Ici, l'équilibre se trouve lorsque les deux joueurs partagent. En effet, si l'on regarde les gains de Bob, celui-ci a toujours intérêt à partager. De ce fait, Alice peut prédire que Bob va partager et jouer selon ce choix, c'est pourquoi elle va aussi partager.



(a) Non-familier



(b) Familier

FIGURE 3.18 – Troisième question

Nous avions émis l'hypothèse que la plupart des lecteurs choisiraient de partager. Cela permet au joueur de s'en sortir avec au minimum le même nombre de points qu'au départ, ce qui n'est pas le cas des autres possibilités.

L'équilibre est en effet choisi par la majorité des participants, avec en moyenne 35% d'entre eux qui ont pris une autre réponse.

Quatrième question

L'énoncé exact était le suivant :

Si Bob joue « voler moitié », que faites-vous en tant qu'Alice ?

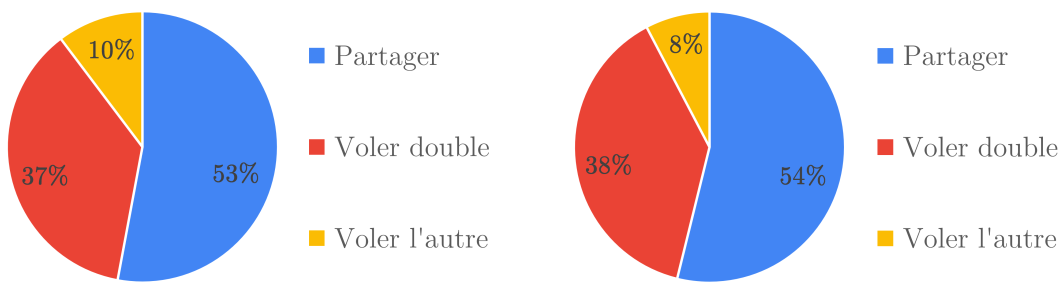
Voici le tableau qui était mis à disposition :

		Bob		
		Voler la moitié Coût : 4	Partager Coût : 2	Voler l'autre Coût : 10
Alice	Voler l'autre Coût : 8	Chacun gagne 4	Alice gagne 2 Bob gagne 5	Alice gagne 10 Bob gagne 8
	Partager Coût : 2	Alice gagne 3 Bob gagne 1	Chacun gagne 2	Alice gagne 6 Bob gagne 2
	Voler double Coût : 10	Alice gagne 8 Bob gagne 5	Alice gagne 4 Bob gagne 6	Alice gagne 20 Bob gagne 10

FIGURE 3.19 – Tableau de la quatrième situation

De nouveau, de la confusion s'ajoute dans l'énoncé car les coûts, comptabilisés dans les gains à la question précédente, apparaissent ici.

Puisque l'on bloque ici le choix de Bob sur « Voler la moitié », il suffit de regarder le meilleur gain qu'Alice pourrait obtenir en faisant attention aux coûts. Si elle choisit de voler l'autre ou de voler double, elle perd des points. Mais en prenant « Partager », elle fait un bénéfice. Elle a donc meilleur temps de choisir cette option.



(a) Non-familier (b) Familier

FIGURE 3.20 – Quatrième question

Nous avions prédit que les participants prendraient en majorité le choix du partage, car la question ne demande que de comparer trois nombres entre eux.

Ici, le choix logique de partager est pris par la majorité des joueurs, mais il y a tout de même un minorité importante de personnes qui ont choisi de voler double. Ceci est probablement dû au fait que le gain d'Alice marqué dans cette case est le plus élevé. Le fait que les lecteurs n'aient pas pris en compte les coûts est compréhensible car ceux-ci n'étaient pas suffisamment mis en avant.

3.8.2 Conclusion

Il est intéressant de remarquer que, comme prédit, les personnes interrogées respectent de manière générale l'équilibre. En effet, la majorité des réponses se trouve sur ces fameux équilibres. Nous pouvons donc en déduire que, de manière instinctive, la plupart d'entre nous faisons les meilleurs choix. Cependant, ces résultats sont à relativiser car le sondage n'était pas parfait et seule une partie infime de la population a été testée.

3.8.3 Comment le sondage aurait-il pu être amélioré ?

Après avoir terminé l'analyse des résultats ainsi que la lecture des commentaires laissés par les lecteurs, certaines améliorations possibles ont été remarquées :

- Clarifier les énoncés et les tableaux, par exemple en concrétisant encore plus les situations
- Préciser lors de l'envoi du sondage le temps qu'il prend, en moyenne
- Toujours mettre les stratégies concernant le lecteur au même endroit, afin d'éviter toute confusion
- Préciser que le but est de ne penser qu'à soi-même, et non au bien commun ; les résultats sont évidemment bien différents si les joueurs coopérent
- Mieux vérifier le sondage avant de l'envoyer, surtout pour la question 3, où l'énoncé ne correspondait pas complètement au tableau

3.9 La théorie des jeux dans le film

Dans *Un homme d'exception* de Ron Howard, la théorie des jeux n'est malheureusement que très peu abordée.

Il y a tout de même un exemple d'application de cette théorie après vingt minutes de film. Nash et ses camarades sont dans un bar et croisent un groupe de femmes. Ils convoitent tous la plus belle d'entre elles, la blonde. Mais Nash leur répond :

> If we all go for the blonde, we block each other. Not a single one of us is gonna get her. So then we go for her friends, but they will all give us the cold shoulder because nobody likes to be second choice. Well, what if no ones goes for the blonde ? We don't get in each other's way, and we don't insult the other girls. That's the only way we win. That's the only way we all get laid. [1]

Nous pouvons donc traduire cette situation dans un tableau comme toutes les autres situations. Pour le simplifier, nous allons définir qu'il n'y a que 2 joueurs et non 4 comme dans le film. Nous posons comme hypothèse qu'il y a un nombre suffisant de copines et que chacun des camarades de Nash en choisit une différente. Ces hypothèses sont en effet remplies dans le film.

		Joueur 1	
		Draguer la blonde	Draguer une copine
Joueur 2	Draguer la blonde	Personne ne gagne	Tout le monde gagne et j.2 est avec la blonde
	Draguer une copine	Tout le monde gagne et j.1 est avec la blonde	Tout le monde gagne

FIGURE 3.21 – « L'exemple des femmes »

Le but dans cette situation n'est pas de gagner seul mais bel et bien de faire gagner le groupe car ils sont tous amis. Pour gagner, il suffit de terminer avec une des femmes mais la dimension sociale s'ajoute car si l'un des amis finit avec la blonde, les autres lui en voudront car ils la convoitaient aussi à la base. Dans le film, l'un d'entre eux dit bien : « Nash, if this is some way for you to get the blonde on your own, you can go to hell. » [2]

1. *Un homme d'exception* : 20'35
2. *Un homme d'exception* : 21'30

La situation qui maintient la victoire **et** l'amitié des joueurs est donc celle où ils vont tous vers une amie de la blonde.

Cet exemple est correct et s'inscrit parfaitement dans la logique de la théorie des jeux. Il est cependant dommage de ne pas en trouver d'autre dans le film qui s'arrête sur la remise du prix Nobel pour les travaux de recherches de Nash sur la théorie des jeux.

Conclusion

En conclusion, pour répondre à la question « La représentation des travaux et de la vie de John Forbes Nash Jr. faite dans *Un Homme d'exception* est-elle correcte ? » nous pouvons dire que le film est assez fidèle à la réalité, surtout en ce qui concerne le peu de théorie des jeux qu'il contient. En effet, « l'exemple des femmes » est parfaitement correct.

Il y a cependant beaucoup de points qui sont romancés dans le film, ce qui est normal. Les scénaristes ne peuvent pas évoquer tous les détails de la vie d'un homme mais il manque tout de même certains aspects importants qui auraient pu renforcer la schizophrénie, thème principal du film. Par exemple, les multiples voyages de John Nash en Europe et son envie de devenir citoyen du monde ne sont jamais mentionnés. Le film oublie aussi de nombreux éléments très importants comme le divorce entre John et Alicia ou les autres relations qu'a pu connaître le mathématicien. La plus grosse erreur reste tout de même que, dans le film, John est déjà schizophrène lorsqu'il étudie à Princeton ce qui n'est pas le cas dans la réalité.

Le travail fait par les cinéastes reste excellent et nous pouvons facilement leur pardonner ces choix artistiques car ceux-ci rendent la compréhension de l'histoire plus aisée et évitent d'avoir une œuvre cinématographique de plus de 5 heures.

Il est aussi important de préciser que ce travail nous a permis de nous ouvrir vers une partie des mathématiques qui n'est pas abordée dans notre cursus scolaire. Nous avons découvert de multiples nouveaux concepts mathématiques, théorèmes et applications de cette magnifique science des chiffres. La théorie des jeux a encore de très nombreux secrets pour nous et notre envie de les découvrir est d'autant plus grande maintenant. Nous n'avons par exemple pas exploré les théorèmes à plusieurs dimensions ou certaines applications de cette théorie dans notre quotidien.

Bibliographie

[FT91] Drew Fudenberg and Jean Tirole. *Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1991. Cours sur la théorie des jeux de John Nash, chapitres 1.1 à 1.2.3.

[Gou17] Frédéric Gourdeau. *Accromath.* Number 12. Institut des sciences mathématiques, hiver-printemps 2017.

[Mon12] Philippe Mongin. *Tangente, l'aventure mathématique : L'apport des vecteurs.* Number 144. Editions POLE, mars-avril 2012. Uniquement les pages 14 à 17 écrites par Philippe Mongin : https ://people.hec.edu/mongin/wp-content/uploads/sites/36/2018/08/V11-Mongin-Tangente12.pdf.

[Nas01] Sylvia Nasar. *Un cerveau d'exception : de la schizophrénie au Nobel, la vie singulière de John Forbes Nash ; Trad. de l'Anglais par DESMOND, William Olivier.* Calmann-Lévy, 2001. Biographie complète et détaillée de la vie de John Nash, jusqu'en 2001 bien évidemment.

[NJ96] John Forbes Nash Jr. *Essays on Game Theory.* Edward Elgar Publishing, 1996. Thèse de doctorat de John Forbes Nash Jr. sur la théorie des jeux.

[OR94] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein. *A Course in Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1994. Cours sur la théorie des jeux de John Nash, chapitre 2.2.

[Sch95] Christian Schmidt. *Nash versus von Neumann et Morgenstern : continuité ou rupture dans l'histoire récente de la théorie des jeux.* SciencesPo, 1995. Uniquement les pages 1003 à 1014 : https ://www.persee.fr/doc/reco_0035-2764_1995_num_46_3_409717.

Webographie

[1] Biographie de John Forbes Nash Jr. http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=nash (dernière consultation le 21 novembre 2019).

[2] A beautiful Mind, the story of John Forbes Nash, Jr. http://www.abeautifulmind.com/personal-life-of-john-nash/#John_David_Stier (dernière consultation le 24 novembre 2019).

[3] Goode Erica. John F. Nash Jr., Math Genius defined by "A Beautiful Mind", Dies at 86. https://www.nytimes.com/2015/05/25/science/john-nash-a-beautiful-mind-subject-and-nobel-winner-dies-at-86.html?smid=fb-share (dernière consultation le 19 septembre 2019).

[4] Affiche de *A beautiful Mind*. https://i.pinimg.com/originals/57/f3/a2/57f3a2eb9703ceb3700ead00eb4f2c63.jpg (dernière consultation le 22 mars 2020).

[5] History - CMU. https://www.cmu.edu/about/history.html (dernière consultation le 20 03 2020).

[6] Le Fine Hall de Princeton. https://files.structurae.net/files/photos/5256/2016-06-10/dsc06762.jpg (dernière consultation le 20 mars 2020).

[7] John et Alicia. https://blogs.futura-sciences.com/lehning/wp-content/uploads/sites/13/2019/02/johnaliciaNash-634x372.jpg (dernière consultation le 20 mars 2020).

[8] John Nash, avec John Harsanyi et Reinhard Selten, à la remise de son prix Nobel. https://www-tc.pbs.org/wgbh/americanexperience/media/filer_public_thumbnails/filer_public/ee/8c/ee8c7650-3efc-4256-913a-ceaeefd2ecfa/nash-nobel-prize.jpg__2000x1448_q85_crop_subsampling-2_upscale.jpg (dernière consultation le 20 mars 2020).

[9] Quartiers généraux actuels de la RAND. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/62/Randcorporationsantamonica.JPG/1920px-Randcorporationsantamonica.JPG (dernière consultation le 20 mars 2020).

[10] Hex - Wikipédia. https://fr.wikipedia.org/wiki/Hex (dernière consultation le 18 mars 2020).

[11] MIT facts meet fiction in 'A Beautiful Mind'. http://news.mit.edu/2002/nash-0213 (dernière consultation le 08 janvier 2020).

[12] La véritable histoire de John Nash, le génie tourmenté. https://nospensees.fr/la-veritable-histoire-de-john-nash-le-genie-tourmente/ (dernière consultation le 19 septembre 2019).

[13] Interview With John Nash's Schizophrenic Son. https://www.youtube.com/watch?v=SizS1nOOeJg (dernière consultation le 19 septembre 2019).

[14] Uber Driver STEALS $1000 (CRAZY MOMENT). https://www.youtube.com/watch?v=5_XX76qC-fk (dernière consultation le 29 février 2020).

[15] Simplexe - Wikipedia. https://fr.wikipedia.org/wiki/Simplexe (dernière consultation le 22 mars 2020).

[16] Prix Abel - Wikipedia. https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Prix_Abel (dernière consultation le 25 novembre 2019).

[17] Stratégie évolutivement stable - Wikipedia. https://fr.wikipedia.org/wiki/Strat%C3%A9gie_%C3%A9volutivement_stable (dernière consultation le 12 février 2020).

[18] Théorie des enchères - Wikipedia. https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_ench%C3%A8res (dernière consultation le 12 février 2020).

[19] Un homme d'exception - Wikipedia. https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Un_homme_d%27exception (dernière consultation le 12 décembre 2019).

[20] John Forbes Nash - Wikipedia. https://fr.wikipedia.org/wiki/John_Forbes_Nash (dernière consultation le 21 septembre 2019).

[21] Théorème du point fixe de Kakutani, 5.1 « cas d'un segment » à 5.3 « cas général » - Wikipedia. https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_du_point_fixe_de_Kakutani (dernière consultation le 06 février 2020).

[22] Leroy P. Steele Prize - Wikipedia. https://en.m.wikipedia.org/wiki/Leroy_P._Steele_Prize (dernière consultation le 25 novembre 2019).

[23] Ron Howard - Wikipedia. https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Ron_Howard#R%C3%A9alisateur (dernière consultation le 12 décembre 2019).

[24] Lemme de Sperner - Wikipedia. https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_de_Sperner (dernière consultation le 07 août 2020).

Table des figures

COLLEGE DU SUD BULLE

PROCES-VERBAL

Procès-verbal *Séance 001*		
	Projet :	**TM Mathématiques et Art**
	Lieu :	CSUD salle des profs de physique
	Horaire :	Mercredi 21.08.2019 : 10h-12h
	Objectif :	Choix des screens et éclairage de certains points administratifs

Participants		Adresse mail
Perroud Quentin	*	PerroudQ@studentfr.ch
Rosset Thomas	*	RossetT@studentfr.ch.
Taj David	*	TajD@edufr.ch

** : présent* *** : temporairement présent* *e : excusé*

#	Thèmes	Quoi/Décision	Qui/Quand
1	Thèmes	- Choix des screens - Questions administratives	
2	Décisions	- Idées : Créer des formes sur bases de polynômes - Idées retenues : figures de l'ombre (gleen) et Will hunting (graphes ou fourier), interstellar théorie gravité/relativité, comparer films à la vie mathématiciens, Nash (cohomologie de de Rahm), hypothèse de Riemann (interpolation) théorie des jeux - Lien entre le film et les maths étudiées pourquoi ce calcul et pas un autre - Choix final : polynômes -> formes (théorie des jeux) + théorie des jeux + cohomologie de de Rahm + éventuellement hypothèse de riemann (Will hunting et un homme d'exception) - Titre : comment les maths sont perçues /représentées dans le cinéma	
3	Tâches à faire pour la suite	- Plan du TM - Trouver un exemple de film « blooper » - Photocopies du livre	

Bulle, le 21 août 2019
Q.Perroud

Quentin Perroud — Thomas Rosset — David Taj

TM Mathématiques et Art — Page 1 sur 3

COLLEGE DU SUD BULLE

PROCES-VERBAL

Procès-verbal *Séance 002*	Projet :	**TM Mathématiques et Art**
	Lieu :	CSUD salle 105
	Horaire :	jeudi 29.08.2019 : 14h37- 15h
	Objectif :	Regarder les trouvailles et discuter d'un fil conducteur

Participants		Adresse mail
Perroud Quentin	*	PerroudQ@studentfr.ch
Rosset Thomas	*	RossetT@studentfr.ch.
Taj David	*	TajD@edufr.ch

** : présent* *** : temporairement présent* *e : excusé*

#	Thèmes	Quoi/Décision	Qui/Quand
1	Thèmes	- Planification - Présentation des recherches matrices adjacence	
2	Décisions	- S'intéresser aux démonstrations récentes de la conjecture de Riemann - Creuser lien entre le film et la vie de John Nash - Théorie des jeux, théorème du point fixe dans la démonstration, équilibre de Nash - Lien avec la réalité (exemple filles compréhensif pour tous), version alternative créée par nous-mêmes, jeux avec ou sans l'équilibre) - Cohomologie de De Rahm - Blooper : centre cercle	
3	Tâches à faire pour la suite	- Recherche conférence de Nash 1950 environ à Princeton - Quentin regarder le film - Recherche blooper	

Bulle, le 29 août 2019
Q.Perroud

Quentin Perroud Thomas Rosset David Taj

Quentin P. Rosset

TM Mathématiques et Art Page 2 sur 3

COLLEGE DU SUD BULLE

PROCES-VERBAL

Procès-verbal *Séance 003*	Projet :	**TM Mathématiques et Art**
	Lieu :	CSUD salle 105
	Horaire :	jeudi 19.12.2020 : 13h25- 15h
	Objectif :	Mettre par écrit les décisions prise depuis le PV de la séance 2

Participants		**Adresse mail**
Perroud Quentin	*	PerroudQ@studentfr.ch
Rosset Thomas	*	RossetT@studentfr.ch.
Taj David	*	TajD@edufr.ch

** : présent* *** : temporairement présent* *e : excusé*

#	Thèmes	Quoi/Décision	Qui/Quand
1	Thèmes	- Contenu du Travail écrit (mettre par écrit les choix faits durant le processus)	
2	Décisions	- Première partie : Biographie de John Forbes Nash puis une comparaison avec ce qui est montré dans le film. - Deuxième partie : Explications des bases de la théorie des jeux avec des exemples et expliquer pourquoi c'est ainsi.(convexité, compact, dérivées) - Etudes sur différents théorèmes du point fixe, pourquoi Nash en a choisi un précisément. - Etude de cadres où la th. des jeux s'inscrit - Etude des conditions pour avoir un équilibre. Eventuellement un exemple avec plusieurs équilibres - Etude de la th. dans le film (i.e l'exemple des femmes est-il correct) - Eventuellement comparaison avec Von-Neumann - Sondage	
3	Tâches à faire pour la suite	- Améliorer le Sondage - Rédiger bases th. des jeux et comparaison vie-film	

Bulle, le 07.01.2020
Q.Perroud

Quentin Perroud Thomas Rosset David Taj

Quentin Rosset

TM Mathématiques et Art Page 3 sur 3

Dossier de travail Perroud Quentin
(Les mathématiques dans le cinéma)

Journal de bord

Organisation du travail			Réflexions	
Date	**Temps [h]**	**Objectifs et Tâches à effectuer**	**Objectifs atteints, Problèmes, Commentaires**	**Total [h]**
Eté 2019	12.75	Regarder les films, prendre et trier les screens shots	38 screens préselectionés	**115.55**
23.08 et 27.08.2019	0.5	Trouver des sources sur la théorie des graphes	Livres et infos sur les polynômes chromatiques trouvés	
28.08.2019	0.5	Trouver des Bloppers	Un lien trouvé et un cas retenu dans le livre	
29.08.2019	1	Travail sur les liens trouvés et recherche de nouveaux liens	Notes sur les matrices d'adjacence	
31.08 et 1.09.2019	2.33	Regarder "Un homme d'exception"	Film vu	
03.09.2019	0.5	Recherches sur la vie de Nash	Infos trouvées mais pas encore de sources croisées	
05.09.2019	1.15	Recherche de livres et de sites webs sur Nash	Livres trouvés à Fribourg, analyse de liens, croisement de sources	
06.09.2019	0.67	Organiser les notes	Moitié des notes organisées	
08.09.2019	0.17	Continuer l'organisation des notes	Notes organisées, classées par périodes et rendues plus lisibles	
10.09.2019	0.17	Croiser les sources sur la vie de Nash	Une source analysée	
12.09.2019	1.58	Apprentissage des dérivés	Limites, dérivées, balles et voisinages vus	

13.09.2019	0.67	Recherches sur la vie de Nash	Infos trouvées mais pas encore de sources croisées
16.09.2019	0.5	Recherches sur la vie de Nash	Infos trouvées et sources croisées
19.09.2019	1.28	Préparation et dernières recherches pour réunion du lendemain	Recherches, visionnages de vidéo, re-consultation de certaines sources
20.09.2019	1.1	Recherches et mise en commun avec Thomas	Dossier avec les notes en commun avec Thomas créé
20.09.2019	DEAD LINE	DEAD LINE VIE NASH	Mise en commun des recherches internet faites
24.09.2019	0.72	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
25.09.2019	0.2	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
26.09.2019	1.58	Cours sur la recherche documentaire, recherches de sources sur la théorie des jeux	Moyens de recherches appris, sources pour la théorie des jeux trouvées
01.10.2019	0.5	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
03.10.2019	1.83	Lire "Un cerveau d'exception", cours de math sur les intégrales et les dérivées partielles	Prise de notes
04.10.2019	0.55	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
07.10.2019	0.53	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
08.10.2019	0.27	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
10.10.2019	1.88	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
11.10.2019	0.43	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
14.10.2019	0.47	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
15.10.2019	0.37	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
16.10.2019	0.35	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes

17.10.2019	1.5	Cours avec M.Taj	Prise de notes, sources
31.10.2019	5.05	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
01.11.2019	3.53	Lire "Un cerveau d'exception"	Prise de notes
07.11.2019	1.33	Reprendre les notes sur "un cerveau d'exception » et les organiser	La plupart des pages réorganisées à l'ordinateur (reste 8 pages)
08.11.2019	0.33	Reprendre les notes sur "un cerveau d'exception » et les organiser	5 pages restantes à organiser
09.11.2019	0.67	Reprendre les notes "un cerveau d'exception et le organiser	2 Pages restantes à organiser
10.11.2019	0.17	Trouver des premières idées de "jeux"	2 idées trouvées dont une sur youtube
11.11.2019	0.50	Reprendre les notes sur "un cerveau d'exception » et les organiser	Terminé
14.11.2019	1.50	Rédiger la biographie de Nash, prise en main de latex	Intro et début du texte rédigés (pas version finale)
16.11.2019	1.25	Recherches et tentatives pour coder un compteur de caractères	Echec complet
18.11.2019	0.83	Rédaction de l'introduction	Mise en page ; intro et avant-propos rédigés (sujets à modifications)
21.11.2019	1.58	Rédaction de la biographie de Nash	Mise en place de la bibliographie sur la biographie de Nash
24.11.2019	0.88	Rédaction de la biographie de Nash	Période au CIT rédigée
25.11.2019	1.50	Rédaction de la biographie de Nash	Périodes à la RAND et à Princeton rédigées
26.11.2019	0.75	Passage en revue du document avec Thomas	To do list sur latex écrite
28.11.2019	DEAD	Rédaction de la biographie de Nash	Faire un premier jet qui sera sûrement retravaillé

	LINE		
28.11.2019	1.5	passer en revue de la partie écrite, recherches théorie des jeux, cours sur latex	Prise de notes
28.11.2019	0.5	Avancer la to do list latex	Plusieurs points finis
02.12.2019	0.67	Recherches théorème point fixe	Prise de notes
02.12.2019	0.38	Recherche d'exemples sur la théorie des jeux	Plusieurs situations trouvées
12.12.2019	1.3	Mise en forme des exemples, trouver d'autres idées	Situation 3 trouvée, première mise en page mais il faut échanger la position des joueurs dans les tableaux
15.12.2019	1.63	Mise en page et envoi du sondage en test à Thomas, M.Taj et d'autres	Sondage mis en page mais je dois encore corriger l'orthographe et réfléchir à un moyen plus explicite d'expliquer les situations
19.12.2019	1.67	Réunion, recherches sur la théorie des jeux	PV et prise de notes
07.01.2020	0.33	Rédaction du PV du 19.12.2019	Fini
08.01.2020	1	Application des modifications discutées sur le sondage, rédaction des titres de la partie 3	Titres rédigés et modifications sur le sondage faites
09.01.2020	1.58	Théorème du point fixe, rédaction des bases de la théorie des jeux	Sondage fini, PV validé, aide sur overleaf, discussion sur le théorème de Kakutani
12.02.2020	0.67	Rédaction des bases de la théorie des jeux	Fini
12.01.2020	2.5	Relecture du travail avec Thomas en vue de la version intermédiaire	TM relu sauf chapitre 2 et la partie schizophrénie
13.01.2020	DEAD LINE	Reddition de la version intermédiaire	Finir biographie de Nash, comparaison avec le film, sondage, bases théorie des jeux
13.01.2020	2.43	Fin de la relecture du travail avec Thomas en vue de la version intermédiaire	Chapitre 2 et la partie schizophrénie relues

15.01.2020	1	Recherches sur le théorème de Kakutani	Démonstration de Kakutani pour un intervalle sur R comprise, à vérifier demain avec Taj
16.01.2020	1	Discussion de la démonstration avec M.Taj (Kakutani)	Démonstration de Kakutani avec un intervalle [0;1] comprise
16.01.2020	0.67	Mise au propre démonstration sur l'intervalle [0;1]	Démonstration de Kakutani sur papier faite
27.01.2020	0.08	Création des schémas pour la démonstration	Fini
29.01.2020	0.63	Rédaction de la démonstration	Tout fait sauf la partie "Preuve"
02.02.2020	1.12	Rédaction de la démonstration	Fini, sûrement encore des retouches esthétiques à faire
06.02.2020	1	Soumission de la preuve à M.Taj	Validé, schémas préparés
06.02.2020	0.67	Avancer la to do list, créers schémas sur la bissection et la convexité	Schémas terminés, il faut les scanner, to do list avancée
09.02.2020	0.67	Rechercher des applications de la théorie des jeux	Exemple en économie, biologie et histoire trouvés, il faut appronfondir pour jeudi
12.02.2020	0.83	Prise de notes sur la bataille de Waterloo (application)	Lecture des documents sur la bataille de Waterloo et préparation sur latex des applications (titres, sources, etc)
13.02.2020	1.5	Discussion sur les dernières recherches effectuées	Recherches présentées à M.Taj
20.02.2020	2	Rédaction des applications	Applications terminées
26.02.2020	1.5	Rédaction partie sur Kakutani à n dimensions	Rédigée, schéma fait main terminés
27.02.2020	2	Scans des schémas, recherches sur la théorie des jeux de Von Neumann	Comparaison avec Neumann rédigée
28.02.2020	1	Mise à jour de la to do list avec Thomas	Réglages de problèmes dans les sources, références au texte, tableaux

29.02.2020	1.5	Impressions des PVs, début de la mise en page du dossier de travail (passage d'Excel à Word)	PVs imprimés, mise en page presque finie (manque colone 4 et dead lines finales)
01.03.2020	0.75	Fin de la mise en page du dossier de travail, recherches sur d'autres théorèmes du point fixe	Mise en page finie, prise de notes sur Brouwer : adaptation à la théorie des jeux faite sur papier. Démonstration dimension 1 comprise, tentative de compréhension à 2 dimensions.
02.03.2020	0.75	Rédaction de la partie sur le théorème du point fixe de Brouwer	Terminé
04.03.2020	1	Question 3 sondage, mise en pages des figures	Question 3 finie, fichiers des figures téléchargés, manque la mise en page des figures
05.03.2020	DEAD LINE	Théorèmes du point fixe, applications, Neumann	Finir Brouwer, Kakutani, applications, Neumann
05.03.2020	1.94	Travail sur la théorie dans le film, mise en pages des figures	Mise en page des figures plus compliquée et chronophage que prévu.
07.03.2020	1	Rédaction de la théorie des jeux dans le film	Terminé
09.03.2020	DEAD LINE	Terminer la rédaction du TM	Terminer la rédaction du TM
09.03.2020	0.65	Relecture du guide	Liste des derniers points à ne pas oublier écrite dans la to do list
11.03.2020	0.83	Avancer la to do list le plus possible	Points de mise en page faits
12.03.2020	1.75	Avancer la to do list le plus possible	Reste la relecture et le dossier de travail ainsi que quelques points à voir avec M.Taj
13.03.2020	0.5	Questions pour M.Taj sur les derniers points de la to do list	To do list terminée
14.03.2020	2	Relecture avec Thomas	Relecture 3.1 et 3.2

14.03.2020	1.67	Relecture orthographique avec Maman	Terminé
15.03.2020	2.5	Suite de la relecture avec Thomas	Fin de la relecture de la partie 3 et de la conclusion
16.03.2020	0.83	Suite de la relecture avec Thomas	Page de titre, table des matières, remerciement, avant-propos et introduction relus. Un problème sur la dernière ligne de la table des matières et un crash de discord nous ont fait perdre du temps
18.03.2020	2.7	Suite de la relecture avec Thomas	Relecture chapitre 1 terminée
19.03.2020	1.6	Suite de la relecture avec Thomas	Terminé
21.03.2020	0.75	Ajout des annexes au document Latex	Terminé
21.03.2020	1.5	Dernières retouches avec Thomas	Quelques dernières vérifications encore à faire demain
22.03.2020	3	Finalisation du TM	Ajout des dossiers de travail, passage à compilatio et reddition.
23.03.2020	DEAD LINE	REDDITION DU TRAVAIL	REDICTION DU TRAVAIL

Dossier de travail Thomas Rosset
(Les mathématiques dans le cinéma)

Organisation du travail				**Réflexions**	
Date	**Temps [h]**	**Objectifs**	**Tâches à effectuer**	**Commentaires**	**Total [h]**
Vacances été 2019	12.75	Préparation matière	Regarder films et prendre + trier les screens shots	Pris des screenshots	**104.35**
23 et 27 août 2019	1	Recherche	Riemann + scans du livre	Riemann + scans du livre	
29.08.19	1	Théorie des Graphes	Travail sur les liens trouvés + new liens	Travail sur la théorie des graphes	
03.09.19	0.333333333	Recherches	Recherche sur la vie de Nash	Infos sur sa schizophrénie	
05.09.19	1.5	Recherches bio Nash	Recherche sur la vie de Nash	Interviews sur le prix Nobel et sur le film	
07.09.19	0.75	Vidéos sur la théorie des jeux	Introduction à la théorie des jeux	Vidéos sur théories des jeux coopérative et non coopérative	
12.09.19	1.5	Cours limites et dérivés	Suivre le cours, prendre des notes	Introduction aux dérivés et aux différents plans	
18.09.19	0.5	Recherches bio Nash	Finir encore quelques sources, dont interviews	Fini une autre interview	
19.09.19	1	recherches vie de Nash	Fin des sources	Fin des sources, reste encore le wiki anglais et une vidéo	
20.09.19	1	Mise en commun des recherches avec Quentin	Mise en commun des recherches, lecture wiki anglais	Mise en commun des biographies	

20.09.19	1	DEADLINE VIE NASH	Mettre en commun	Mis en commun des recherches
21.09.19	0.333333333	Mise en page biographie	Mise en page biographie	Mise en page biographie
26.09.19	1	Atelier bibliographie	Méthodologie de recherche	Méthodologie de recherche + recherches sur la théorie des jeux
26.09.19	0.5	cours dérivés	Ecouter Taj	prouvé que sin'(x)=cos(x)
30.09.19	1	Revisionner Un Homme d'exception	Noter la représentation de Nash selon le film	Commencé la bio selon le film, surtout études + vie adulte
03.10.19	1.5	cours tm	Continuation dérivés et intégrales	Tâches ainsi que lien entre intégrale et dérivé
07.10.19	0.333333333	Recherches Riemann	Recherche de sources	Vidéo sur le lien entre l'hypothèse de Riemann et la répartition des nombres premiers
09.10.19	0.75	Continuer Un Homme d'exception	Continuer la prise de notes	Début du traitement de schizophrénie, mariage et vie de couple
10.10.19	1	Continuer Un Homme d'exception	Continuer la prise de notes	Fin du film, donc jusqu'à remise du prix nobel
10.10.19	0.5	Débuter "Essays on Game Theory"	Prendre des notes	Pris des notes sur une partie de l'introduction, surtout sur Von Neumann et Morgestern
17.10.19	1.5	Cours TM	Comprendre les équilibres de Nash	Etude d'un papier sur les équilibres de Nash

25.10.19	1	Continuer "Essays on Game Theory"	Débuter "The Bargaining Problem"	Notions d'anticipation, de probabilité et d'utilité
01.11.19	1.5	Continuer théorie des jeux	Trouver plus d'informations	Abandon de la thèse de Nash (trop compliquée), recherches de sources en lignes et prise de notes
03.11.19	2.75	Continuer théorie des jeux	Lire doc Drew Fudenberg + sources internet	Fini 1.1 à 1.2.3, lu certaines sources en ligne
07.11.19	0.25	Continuer théorie des jeux	Chercher quelques sources supplémentaires	Vérifié les connaissances passées
08.11.19	0.75	Mise en page du TM	Créer un document contenant la mise en page du TM	Fait page de titre, table des matières, mise en page des titres et du texte, en-tête et bas de page
11.11.19	0.5	Lecture des notes sur sa bio	Lire les notes et proposer quelques changements si nécessaire	Lu les notes, corrigé quelques fautes, proposé des changements, posé des questions
13.11.19	0.25	Essai de conversion de Word à LaTeX	Convertir le document existant en LaTeX	Echec le plus total, il faudra recommencer à zéro
14.11.19	3	Mise en page d'un document LaTeX	Prendre en main LaTeX et commencer à mettre en page le document	Notions de bases acquises, page de titre, table des matières, début des sections
18.11.19	0.75	Ecriture TM	Commencer la partie sur la schizophrénie	Défini certaines sous-parties, écrit une partie du texte
21.11.19	1.6	Ecriture TM	Avancer le texte sur sa vie	Ecriture de sa schizophrénie, mise en place des sources, cette fois

				dans l'ordre des règles
23.11.19	0.5	Ecriture bio Nash	Avancer la schizophrénie	Fini effets, avancé causes et conséquences
24.11.19	2.25	Ecriture bio Nash	Avancer la schizophrénie et sa vie adulte	Quasi tout fini la schizophrénie, quelques détails à rajouter plus tard ; fait la vie de couple, une partie du travail
25.11.19	1.5	Ecriture bio Nash	Avancer sa vie adulte	Fini, restera 2-3 infos à enfiler par ci par là, ainsi que la comparaison avec le film
26.11.19	2.25	Ecriture bio Nash	Finir la biographie et revoir le document avec Quentin	Biographie terminée, il restera la comparaison avec le film
28.11.19	1.5	Cours avec Taj et Charrière	Cours sur la théorie des jeux avec Taj et sur LaTeX avec Charrière	Mise en commun du travail effectué, reçu la template du TM
28.11.19	DEADLINE	Rédaction de la biographie	Finir la rédaction de la biographie de Nash	Finir un premier jet, qui sera retravaillé
30.11.19	1	Transfert vers le nouveau fichier	Transférer contenu et sources sur le modèle de Charrière	Transféré le tout et adapté ce qu'il faut
02.12.19	0.75	Cours avec Taj	Avancer sur la théorie des jeux	Fin de la notion de best utility, début du théorème du point fixe
12.12.19	0.5	Ecriture film	Commencer la description du film	Fait une introduction

15.12.19	0.75	Ecriture film	Continuer la description du film, mise en page du sondage avec Quentin	Fini l'introduction et la vie enfant, ainsi que revisité la mise en page de la partie
06.01.20	0.75	Ecriture film	Continuer la description du film	Fait la partie des études
08.01.20	1	Ecriture film	Continuer la description du film	Fait la partie vie de couple, commencé le travail
09.01.20	1.5	Discussion et cours avec Taj	Discuter des formalités, aborder le théorème du point fixe	Formalités, discussion sur le sondage, début de la preuve du théorème de Kakutani
11.01.20	1	Ecriture film	Continuer la vie adulte, ainsi que la schizophrénie	Fini la vie adulte, reste la schizophrénie à traiter
12.01.20	1.5	Fin écriture film	Partie sur la schizophrénie	Fait la schizophrénie dans le film
12.01.20	2.5	Relecture TM avec Quentin	Relire la totalité du TM avec Quentin	Fait 0.1 à 1.3 inclus
13.01.20	DEADLINE	Version intermédiaire du TM	Rendre la version intermédiaire du TM	Finir toute la partie biographique
13.01.20	2.43	Relecture TM avec Quentin	Finir la relecture du TM avec Quentin	Fini.
16.01.20	0.75	Vulgarisation théorie des jeux	Début de mise en place d'un exemple concret	Essai d'un exemple, finalement annulé
29.01.20	1	Vulgarisation théorie des jeux	Mise en place d'un exemple concret	Idée mieux trouvée de vente de biscuits
04.02.20	1.5	Vulgarisation théorie	Mise en page partie de	Fait les 3 tableaux de base

		des jeux	l'exemple	
06.02.20	1.25	Vulgarisation théorie des jeux + début des problèmes	Fin de l'exemple et commencer à parler des problèmes	Fini l'exemple, un peu de mise en page, parlé des problèmes de définition des gains et de l'utilité de la théorie des jeux
13.02.20	1.5	Mise en commun	Poser des questions et voir l'exemple	Posé les questions, revu l'exemple, meilleure mise en page en cours
16.02.20	1	Traitement des données du sondage	Remise en page des données, traçage de graphes	Fait des graphes par question, séparant les personnes connaissant la théorie des jeux et les autres
17.02.20	0.75	Travail sur la mise en page des tableaux	Remettre en page les tableaux de l'exemple	Tableaux plus faciles à comprendre, plus élégants
20.02.20	0.5	Explication de l'équilibre de l'exemple	Compléter l'explication déjà existante	Problème de formulation, à revoir
24.02.20	1.75	Continuer l'exemple	Reformuler l'explication + rajouter des critères	Explication finie + exemple avec coût des cookies
28.02.20	1.5	Continuer les problèmes	Explication de la complication, ainsi qu'élargissement	Continué la complication, discussion avec Quentin sur certains points
29.02.20	2	Commencer l'analyse écrite du sondage	Introduction au sondage, ainsi que début d'analyse	Introduit l'idée du sondage ainsi que les différentes questions
02.03.20	2.25	Fin problèmes + continuer sondage	Mettre en place le dernier tableau, continuer l'analyse	Terminé les problèmes, remis en page les graphes du sondage et

			du sondage	des images dans LaTeX
04.03.20	1.45	Finir le sondage	Traiter les questions du sondage	Fini de traiter les quatres questions du sondage, avec quelques problèmes de mise en page
05.03.20	1.5	Théorie dans le film et mise en page des figures	Regarder certaines mise en page de figures, commencer la comparaison avec le film	Remis en page certaines images, ainsi que le sondage en général, attribution des dernières tâches
06.03.20	1.5	Remake des images	Changer les textes manuscrits en texte Latin Modern	Changé toutes les images et remis le document en page
08.03.20	2	Traitement du duopole de Cournot	Expliquer en détail le duopole de Cournot pour imager la théorie des jeux	Traité l'exemple de Cournot
09.03.20	DEADLINE	Finir l'écriture du TM	Terminer tout le corps principal du TM	Fini les chapitres 1 à 3, reste la conclusion et les remerciements
10.03.20	0.75	Passage au travers du guide du TM	Vérifier que le travail correspond aux exigences du guide	Relevé certains critères qui pourraient poser un problème pour l'instant
11.03.20	0.75	Remerciements + revoir le sondage	Faire les remerciements et revoir les analyses du sondage	Fini les remerciements, réglé certaines erreurs de compilation, étendu les pronostics et résultats du sondage, ajouté une légende à certains tableaux

14.03.20	2.5	Relecture TM	Commencer la relecture du TM avec Quentin	Relu 3.1-3.2, modifié quelques tournures et quelques problèmes de mise en page
14.03.20	0.5	Mise en page du dossier de travail	Mettre en page le dossier de travail	Dossier remis en page avec Word
15.03.20	1.5	Relecture TM	Continuer la relecture du TM avec Quentin	Relu 3.3-3.4
15.03.20	2.5	Relecture TM	Continuer la relecture du TM avec Quentin	Relu fin de la partie 3 et conclusion
16.03.20	0.8	Relecture TM	Continuer la relecture	Relu page de titre, table des matières, avant-propos, remerciements et introduction
18.03.20	1.2	Passage au travers du TM avec mon père	Voir les corrections possibles au niveau du style	Revu toute la partie biographie
18.03.20	1.2	Relecture TM	Continuer la relecture du TM avec Quentin	Lu 1.1 et 1.2
18.03.20	1.5	Relecture TM	Lire 1.3 et 1.4	Lu 1.3 et 1.4
19.03.20	1	Passage au travers avec mon père	Voir les corrections possibles	Revu la partie film
19.03.20	1.6	Relecture TM	Continuer la relecture du TM avec Quentin	Relu partie 2
20.03.20	1.25	Ajout d'images à la partie biographique	Ajouter des images pour alléger les parties 1 et 2	Fait la partie 1 en entier
20.03.20	1.5	Passage au travers avec mon père	Voir les corrections possibles	Revu partie 3 et conclusion

21.03.20	1.5	Quelques retouches	Faire quelques retouches, lire des commentaires avec Quentin	Revu la plupart de la todo list, le reste sera fait demain
22.03	3.5	Quelques retouches	Finir les dernières retouches à faire + rajouter des images à la partie 2	Fait les retouches, mis des images, rajouté les dossiers de travail, reddition
23.03.20	DEADLINE	Reddition du TM	Rendre le TM	A faire de manière numérique à cause du coronavirus

Déclaration sur l'honneur

Quentin Perroud
Route Montimbert 20
1618 Châtel-St-Denis

Thomas Rosset
Rue des chenevières 13
1636 Broc

Nous certifions que le travail

Les mathématiques dans le cinéma
La représentation des travaux et de la vie de John Forbes Nash Jr. faite dans *Un Homme d'exception* est-elle correcte?

a été réalisé par nous conformément au « Guide de travail » des collèges et aux « Lignes directrices » de la DICS concernant la réalisation du Travail de Maturité.

Lieu, date : Bulle, 21.03.2020

Quentin Perroud
Quentin P.

Thomas Rosset
Rosset