

Les Fractales

Théorème du point fixe de Banach et application à la construction de fractales

TRAVAIL DE MATURITÉ

JÉRÉMIE DUJARDIN
JÉRÔME SCYBOZ

Collège du Sud, Bulle
Avril 2014

Travail de maturité réalisé
sous la direction de
M. Laurent Karth
(Mathématiques)

Table des matières

1	Espaces métriques	7
1.1	Continuité	12
1.2	Suites de Cauchy et convergence	13
1.3	Espaces complets	15
1.4	Ensembles ouverts et fermés	16
1.5	Ensembles bornés et totalement bornés	18
1.6	Ensembles compacts	20
2	Applications contractantes et théorème du point fixe de Banach	23
2.1	Applications contractantes	23
2.2	Théorème du point fixe de Banach	27
2.2.1	Existence du point fixe	27
2.2.2	Unicité du point fixe	29
3	Application du théorème de Banach aux fractales	31
3.1	Espaces des fractales	31
3.2	Applications contractantes sur l'espace fractale	35
4	Construction de fractales sur \mathbb{R}^2 à l'aide d'IFS	41
4.1	Applications sur \mathbb{R}^2	41
4.2	Application du théorème 3.2.6	46
4.3	Quelques fractales	47
4.3.1	Triangle de Sierpinski	47
4.3.2	Courbe de Koch	49
4.3.3	Arbres	49
4.3.4	Flocons	53
4.3.5	Feuilles	55

4.3.6	Courbes	55
4.3.7	Tapis de Sierpinski	61
4.4	Code	61
	Conclusion	69
	Bibliographie	71
	Webographie	74
	Liste des notations	75
	Résumé	77
	Déclaration sur l'honneur	79

Introduction

Les mathématiques sont communément considérées comme la reine des sciences puisqu'elles sont la source de chacune d'elles. Il est toujours impressionnant de voir toutes ses applications ainsi que sa capacité à sans cesse résoudre des problèmes, décrire des phénomènes et répondre aux questions. Le monde des fractales n'en est qu'une infime partie et est pourtant déjà gigantesque. Le but de ce travail est de brièvement faire découvrir cet univers et de permettre aux lecteurs d'avoir une idée de ce que peut être une fractale. Nous insistons bien sur le « ce que peut être une fractale » puisque celles-ci représentent un domaine bien trop grand pour être défini. A ce propos, en raison de leur irrégularité et de leur complexité, il n'existe pas de définition au sens strict du terme. Décrire une fractale s'avère une tâche très difficile puisque nous sommes soit trop abstraits et imprécis, soit incomplets et réducteurs. En vulgarisant, nous pouvons définir une fractale comme une forme géométrique extrêmement complexe où, quelle que soit l'échelle, chacune de ses parties possède une structure approximativement similaire au tout. L'univers des fractales étant bien trop vaste, nous nous limiterons à l'une de ses sous-parties : les systèmes de fonctions itérées, souvent abrégés en IFS de l'anglais "Iterated Function System". En combinant ces derniers avec le théorème du point fixe de Banach ainsi que l'espace fractale, nous verrons que ces IFS possèdent des propriétés tout à fait étonnantes, permettant par exemple de transformer un carré en feuille, en arbre ou encore en flocon de neige. Pour y arriver, nous commencerons par introduire la notion d'espace métrique ainsi que d'application contractante. Ceux-ci nous amèneront au théorème du point fixe de Banach que nous appliquerons à des points dans l'espace des fractales. Dans ce travail, notre source principale sera le livre de Barnsley, *Fractals Everywhere* [Bar93]. Nous signalons également la présence d'une liste des notations à la fin du document afin d'en faciliter la lecture.

Bien que l'immensité ainsi que la complexité des mathématiques puissent nous effrayer dans un premier temps, il est toujours passionnant de se dire qu'elles ne cesseront d'innover et de nous surprendre.

Chapitre 1

Espaces métriques

Notre premier objectif sera d'arriver jusqu'au théorème du point fixe de Banach. Cependant, ce dernier n'est applicable que lorsque des conditions bien précises sont remplies. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire un certain nombre de notions, dont les espaces métriques, ainsi que certains concepts qui leur sont liés. Toutes les définitions seront données pour les espaces métriques. Nous introduirons les concepts de continuité et de convergence, d'espaces complets, d'ensembles ouverts, fermés, bornés, totalement bornés et compacts.

1.0.1 Définition *Un espace métrique (X, d) est un ensemble X avec une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, qui définit une distance entre deux points x et y dans X . La fonction d remplit les axiomes :*

- (1) $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$;
- (2) $0 < d(x, y) < \infty \forall x, y \in X, x \neq y$;
- (3) $d(x, x) = 0 \forall x \in X$;
- (4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in X$.

Une telle fonction est appelée métrique.

Précisons juste en quelques mots chaque axiome. Le premier signifie que si nous mesurons la distance d'un premier point à un deuxième, nous obtiendrons le même résultat que si nous mesurons la distance du deuxième point au premier. Le deuxième axiome dit que la valeur retournée est strictement positive si $x \neq y$ et le troisième axiome que la valeur vaut 0 si $x = y$. Le quatrième axiome signifie que $d(x, y)$ est la plus petite distance entre les points x et y . Nous pouvons vulgariser la notion de métrique en disant que c'est une manière de "mesurer" la distance entre deux

points. Analogiquement, dans la vie de tous les jours, nous utilisons la distance à vol d'oiseau, en voiture, à pied etc. D'une part pour mieux se familiariser avec cette notion et d'autre part pour permettre d'illustrer la matière à venir, nous allons présenter quelques métriques.

1.0.2 Exemples Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux points dans \mathbb{R}^n . Alors les métriques qui vont suivre sont définies de la manière suivante :

- (a) La métrique discrète : $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$.
- (b) La métrique de Manhattan : $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. Elle suit un tracé en forme de grille. Son nom provient des routes orthogonales de la ville.
- (c) La métrique euclidienne : $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. C'est la métrique la plus "intuitive" et celle qui nous est la plus familière. Elle permet de représenter de façon naturelle la géométrie traditionnelle.
- (d) La métrique de Minkowski : $d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$, où $p \in \mathbb{N}^*$ représente le nombre de distances. Nous remarquons que pour $p = 1$, la distance de Minkowski est en fait celle de Manhattan et que pour $p = 2$, c'est la distance euclidienne.

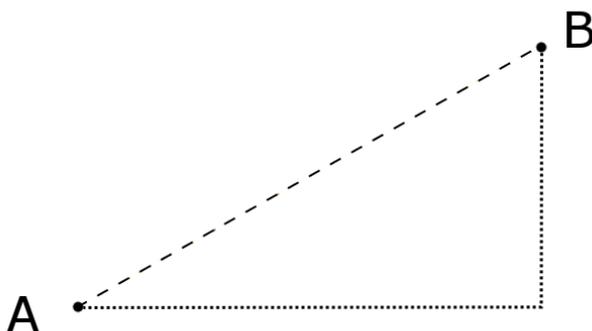


FIGURE 1.1 – Distances euclidienne et de Manhattan

Sur la figure 1.1, nous pouvons voir dans \mathbb{R}^2 la distance euclidienne en traitillé ainsi que la distance de Manhattan en pointillé.

Nous allons maintenant démontrer que ce sont bien des métriques, c'est-à-dire qu'elles respectent les quatre axiomes de la définition. Toutefois, nous ne prouvons pas la métrique de Minkowski est une métrique puisque la démonstration du quatrième axiome découle de l'inégalité de Minkowski qui est relativement longue à

prouver. De plus, dans la suite de notre travail, nous utiliserons uniquement la métrique discrète, la métrique de Manhattan ainsi que la métrique euclidienne. Pour avoir une démonstration complète de la métrique de Minkowski, consultez le site internet [9].

(a) La métrique discrète : $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$.

Démonstration

Le premier axiome est rempli par la définition de la métrique discrète.

Le deuxième est également rempli puisqu'elle ne peut retourner que la valeur 1 lorsque $x \neq y$.

Le troisième est à nouveau rempli par sa définition.

Nous allons séparer les cas pour le quatrième axiome :

Si $x = y$, il faut vérifier que $0 \leq d(x, z) + d(z, y)$ et par les axiomes (2) et (3) l'inéquation est dans tous les cas vérifiée.

Si $x \neq y$, nous allons à nouveau décomposer les cas. Si $x \neq z$ et $y \neq z$, nous avons $1 \leq 1 + 1$. Si $x \neq y$ et $x = z$, nous avons $1 \leq 1 + 0$. Si $x \neq y$ et $y = z$, nous avons $1 \leq 0 + 1$. Dans tous les cas, l'axiome est rempli. ■

(b) La métrique de Manhattan : $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

Démonstration

Le premier axiome est rempli du fait que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nous avons $|x_i - y_i| = | -(-x_i + y_i) | = | -x_i + y_i |$.

Le deuxième axiome est également rempli puisqu'il s'agit d'une sommation de valeurs absolues. Comme $x \neq y$, il existe au moins un $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $x_i \neq y_i$ et donc que $d(x_i, y_i) > 0$. La valeur retournée sera par conséquent forcément positive.

Le troisième axiome est aussi rempli puisque nous avons une sommation de 0.

Nous allons à nouveau séparer les cas pour le quatrième axiome. Nous devons démontrer que $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i|, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Nous démontrons d'abord l'inégalité pour un $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Supposons premièrement que $x_i > y_i$. Si $z_i > x_i$, nous avons $x_i - y_i < z_i - y_i$ et donc $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$. Si $z_i < y_i$, nous avons $x_i - y_i < x_i - z_i$ et donc $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$. Si $y_i < z_i < x_i$, nous avons $x_i - y_i = x_i - z_i + z_i - y_i$ et donc $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$. Nous voyons que peu importe le z_i , l'inéquation est toujours remplie. Puis, grâce à la valeur absolue, nous avons que $|x_i - y_i| = | -x_i + y_i |$ et donc que l'inéquation est

également remplie lorsque $x_i < y_i$. Comme $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, il s'ensuit que $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i|, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$. ■

(c) La métrique euclidienne : $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

Démonstration

Le premier axiome peut facilement être démontré puisque $(x_i - y_i)^2 = (-(-x_i + y_i))^2 = (-x_i + y_i)^2$ et donc $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (-x_i + y_i)^2}$.

Le deuxième axiome est rempli puisqu'il s'agit de la racine d'une sommation de termes élevés au carré. Comme $x \neq y$, il existe au moins un $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $x_i \neq y_i$ et donc que $d(x_i, y_i) > 0$. La valeur retournée sera par conséquent forcément positive.

Le troisième axiome est également rempli puisque nous avons la racine d'une sommation de 0.

Le quatrième axiome est un peu plus délicat à démontrer. Nous devons montrer que $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}$. Pour cela, nous avons premièrement besoin de prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui est la suivante : $|\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$. Si x ou y est l'origine O , l'inéquation est correcte. Supposons donc que $x, y \neq 0$. Fixons x et y et posons la fonction $\phi(t) = \sum_{i=1}^n (x_i + t \cdot y_i)^2$, où $t \in \mathbb{R}$. D'une part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il est clair que la fonction $\phi(t) \geq 0$. D'autre part, en t , nous avons

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{i=1}^n (x_i + t \cdot y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 2 \cdot t \cdot x_i \cdot y_i + t^2 \cdot y_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \cdot t \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i + t^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2. \end{aligned}$$

Comme $y \neq 0$, nous obtenons que $\phi(t)$ est un polynôme du deuxième degré en t et, comme $\phi(t) \geq 0$, son discriminant est plus petit ou égal à 0. Pour tout $x, y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \Delta &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right)^2 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz étant démontrée, revenons à notre quatrième axiome. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i^2 + 2 \cdot u_i \cdot v_i + v_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^n v_i^2. \end{aligned}$$

Puis, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il en découle que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^n v_i^2 \\ & \leq \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} + \sum_{i=1}^n v_i^2 \\ & = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2 & \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2} & \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}. \end{aligned}$$

Puis, en posant $u = x - z$ et $v = z - y$, nous obtenons

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}.$$

■

Nous pouvons déduire la propriété suivante de l'axiome (4) des espaces métriques :

1.0.3 Propriété *Soit (X, d) un espace métrique et $x, y, z_1, z_2, \dots, z_n$ des points dans X . Alors*

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_n, y).$$

Démonstration

Démontrons le par récurrence.

L'ancrage $d(x, y) \leq d(x, z_1) + d(z_1, y)$ est vérifié par définition de la métrique.

L'hypothèse de récurrence est $d(x, y) \leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_n, y)$.

La conclusion de récurrence est $d(x, y) \leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_n, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, y)$.

Par la définition de l'espace métrique, nous pouvons écrire que

$$d(z_n, y) \leq d(z_n, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, y).$$

Puis en l'introduisant dans l'hypothèse nous avons que

$$d(x, y) \leq d(x, z_1) + d(x, z_2) + \dots + d(z_n, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, y).$$

■

1.1 Continuité

Nous allons maintenant introduire toutes les notions nécessaires à la compréhension ainsi qu'à la démonstration du théorème du point fixe de Banach en commençant par la continuité. Intuitivement, nous avons tous une idée de ce qu'est une fonction continue. Pourtant, nous verrons que l'intuition est parfois trompeuse, d'où la nécessité de se rattacher à la définition.

1.1.1 Définition Soit (X, d) et (X', d') deux espaces métriques et $f : X \rightarrow X'$ une fonction allant de X dans X' . Alors la fonction f est continue si, $\forall \epsilon > 0$ et $\forall x \in X$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Illustrons la définition par deux exemples.

1.1.2 Exemples

- (a) Soit un espace métrique (\mathbb{R}, d) où d est la métrique de Manhattan et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction par morceaux définie de la manière suivante : $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$. Il est facile de voir que la fonction n'est pas continue en $x = 0$. Pour $\epsilon = \frac{1}{10}$ par exemple, nous ne pouvons trouver de δ en raison du passage de 1 à 0.
- (b) Toujours dans \mathbb{R} , reprenons la même fonction mais cette fois-ci avec la métrique discrète. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in X$, nous pouvons alors trouver $\delta \in]0, 1]$ tel que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$. En effet, les seuls cas remplissant la première inéquation sont $x = y$. Or, si $x = y$, nous avons $f(x) = f(y)$ et donc

$d(f(x), f(y)) = 0 < \epsilon$. Nous remarquons ainsi que le choix de la métrique est crucial et que la continuité d'une fonction dépend de la métrique choisie. Nous constatons également que, par le raisonnement précédent, toute fonction est continue avec la métrique discrète.

1.2 Suites de Cauchy et convergence

Les suites de Cauchy sont la deuxième notion nécessaire à la démonstration du théorème du point fixe de Banach.

1.2.1 Définition Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans un espace métrique (X, d) est appelée une suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m > N.$$

Autrement dit, plus nous avançons dans la suite, plus nous pouvons garantir une proximité entre les termes. Cependant, il n'est pas obligatoire que la distance soit décroissante. Lorsque nous parlerons de suite, nous utiliserons parfois la notation (x_n) au lieu de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans le but d'alléger l'écriture. S'il arrivait qu'il en soit différemment à un endroit, nous le préciserons toujours au moment de poser la suite. Illustrons la définition par deux exemples.

1.2.2 Exemples

- (a) Soit (\mathbb{R}, d) un espace métrique où d est la métrique de Manhattan. Soit (x_n) une suite définie de la manière suivante : $(x_n) = \frac{1}{n}$. En effet, $\forall \epsilon > 0$, nous pourrions toujours trouver N tel que $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, pour $i, j > N$, nous avons $\frac{1}{i}, \frac{1}{j} < \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$ et donc $d(x_i, x_j) = \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| < \frac{1}{i} + \frac{1}{j} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
- (b) Remarquons toutefois que les impressions sont parfois trompeuses. Prenons la même suite (x_n) avec l'espace métrique (\mathbb{R}, d) où d est cette fois la métrique discrète. Nous avons alors $d(x_i, x_j) = 1$, pour tout $i \neq j$. Posons $\epsilon = \frac{1}{4}$. Pour n'importe quel $N \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}$ avec $i > N$, nous avons $d(x_i, x_{i+1}) = 1 \not< \epsilon$. La suite (x_n) n'est donc pas une suite de Cauchy.

Nous allons maintenant définir la convergence puis démontrer un lien entre suites de Cauchy et suites convergentes.

1.2.3 Définition Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans un espace métrique (X, d) est dite convergente vers un point $l \in X$, si pour n'importe quel $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$d(x_n, l) < \epsilon, \forall n > N.$$

Le point l est appelé la limite de la suite. Nous utilisons la notation

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Nous disons que la suite converge vers le point l .

1.2.4 Théorème Si une suite (x_n) , dans un espace métrique (X, d) , converge vers un point $l \in X$, alors (x_n) est une suite de Cauchy.

Démonstration

Soit (x_n) une suite convergente et $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_v, l) \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad d(x_w, l) \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall v, w > N.$$

Or, par la définition de la métrique, nous avons

$$d(x_v, x_w) \leq d(x_v, l) + d(l, x_w) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall v, w > N$$

■

Remarquons que la réciproque n'est pas vraie.

1.2.5 Exemple Prenons un exemple dans \mathbb{Q} avec la métrique de Manhattan. Soit (x_n) une suite de Cauchy définie par récurrence de la manière suivante : $x_0 = \frac{3}{2}$ et $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$. Ses premiers termes sont $x_0 = \frac{3}{2}, x_1 = \frac{17}{12} \simeq 1.41\bar{6}, x_2 = \frac{577}{408} \simeq 1.414215$. C'est une suite décroissante de nombres rationnels qui tend vers $\sqrt{2}$. Cependant, comme $\sqrt{2}$ n'appartient pas à \mathbb{Q} , (x_n) ne possède pas de limite rationnelle. Toutefois, remarquons également qu'avec la métrique de Manhattan, la réciproque est toujours vraie dans \mathbb{R} , c'est-à-dire que toute suite de Cauchy dans \mathbb{R} converge vers un point dans \mathbb{R} .

Nous allons maintenant introduire un lemme directement induit de la définition de la continuité et de la convergence.

1.2.6 Lemme Soit (X, d) un espace métrique, (u_n) une suite convergeant vers $l \in X$ et f une fonction continue. Alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$.

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$. Il faut trouver N tel que $d\left((f(u_n)), f(l)\right) < \epsilon, \forall n > N$. Comme f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d\left((u_n), l\right) < \delta \Rightarrow d\left((f(u_n)), f(l)\right) < \epsilon.$$

Or, comme (u_n) converge vers l , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d\left((u_n), l\right) < \delta, \forall n > N$, ce qui complète la preuve. ■

1.3 Espaces complets

Les espaces complets vont tout particulièrement nous intéresser puisque le théorème du point fixe de Banach est uniquement applicable dans ceux-ci. Commençons par la définition puis par quelques exemples.

1.3.1 Définition Un espace métrique (X, d) est complet si toutes les suites de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans X possèdent une limite $l \in X$.

1.3.2 Exemples

- (a) Reprenons la suite de Cauchy utilisée comme contre-exemple 1.2 de la convergence d'une suite de Cauchy. Soit (\mathbb{Q}, d) un espace métrique où $d(x, y) = |x - y|$ est la distance de Manhattan, (x_n) une suite de Cauchy définie par récurrence de la manière suivante : $x_0 = \frac{3}{2}$ et $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$. Bien que ce soit une suite composée uniquement de nombres rationnels, elle converge vers $\sqrt{2}$ qui n'appartient pas à \mathbb{Q} . L'espace métrique (\mathbb{Q}, d) n'est donc pas complet.
- (b) Prenons un autre exemple. Soit (\mathbb{R}, d) un espace métrique où d est la métrique de Manhattan. Soit I l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et (x_n) la suite de Cauchy définie par $(x_n) = \frac{1}{n} \in I$ pour $n = 2, 3, 4, \dots, n$. Celle-ci converge vers 0. Cependant, 0 n'appartient pas à l'intervalle I . Ce dernier n'est donc pas complet muni de la métrique de Manhattan.
- (c) Prenons cette fois l'intervalle I fermé $[0, 1]$ avec l'espace métrique (\mathbb{R}, d) , où d est la métrique de Manhattan. L'espace métrique (I, d) est complet.

- (d) Intéressons-nous maintenant à l'espace \mathbb{R} des nombres réels. Celui-ci est complet avec la métrique de Manhattan, tout comme l'espace euclidien \mathbb{R}^n l'est avec la métrique euclidienne.

1.4 Ensembles ouverts et fermés

Un ensemble peut être qualifié d'ouvert, de fermé, d'ouvert et de fermé, c'est-à-dire des deux à la fois. Nous verrons que les fermés seront indirectement très pratiques pour vérifier si un ensemble est ou n'est pas compact.

1.4.1 Définition Soit un espace métrique (X, d) et $S \subset X$ un sous-ensemble de X .

- (a) S est un ouvert de X si pour tout $s \in S$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $B(s, \epsilon) \subset S$, où $B(s, \epsilon) = \{x \in X \text{ tel que } d(x, s) < \epsilon\}$.
- (b) S est un fermé de X si son complémentaire est un ouvert de X , c'est-à-dire si $X \setminus S$ est un ouvert de X .

En vulgarisant, nous pouvons dire que les espaces fermés incluent leur frontière et les ouverts non. Souvent, nous ne précisons pas l'espace relatif de la notion d'ouvert ou de fermé : nous aurons tendance à dire " S est un fermé" plutôt que " S est un fermé de X ". Pour mieux assimiler la notion d'ouvert et de fermé, nous allons donner quelques exemples.

1.4.2 Exemples

- (a) Soit (\mathbb{R}, d) un espace métrique, où d est la distance de Manhattan. L'intervalle $I =]0, 1[$ est un ouvert de \mathbb{R} . En effet, pour tout $x \in I$ et $\epsilon = \min |x|, 1 - |x|$, la "boule" de rayon ϵ centrée en x est encore comprise dans l'intervalle. Comme 0 et 1 n'appartiennent pas à l'intervalle I , ce dernier ne possède ni de majorant, ni de minorant et donc une infinité de points. De ce fait, nous pourrions toujours trouver un ϵ permettant de répondre au critère.
- (b) Par opposition et toujours avec la même métrique, l'intervalle $I = [0, 1]$ est fermé de \mathbb{R} . En effet, son complémentaire est $\mathbb{R} \setminus [0, 1] =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ qui est un ouvert de \mathbb{R} . Nous remarquons ainsi que dans \mathbb{R} avec la métrique de Manhattan, les intervalles ouverts sont des ouverts de \mathbb{R} et les intervalles fermés sont des fermés de \mathbb{R} .
- (c) Il existe des sous-ensembles qui ne sont ni des ouverts, ni des fermés. Soit (\mathbb{R}, d) un espace métrique où d est la métrique de Manhattan. L'intervalle $I = [0, 1[$ en est un exemple.

- (d) Il faut toutefois bien faire attention au choix de la métrique. Reprenons le premier exemple avec l'intervalle $I =]0, 1[$ mais cette fois avec l'espace métrique (\mathbb{R}, d) où $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$ est la métrique discrète. Soit $\epsilon > 0$. Alors, $\forall i \in I, B(i, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } d(x, i) < \epsilon\}$. Nous pouvons alors trouver ϵ de sorte que $B(i, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } d(x, i) < \epsilon\} \subset I$. En effet, pour $\epsilon \in]0, 1]$, pour chaque $i \in I$, le seul point répondant à l'inéquation $d(x, i) < \epsilon$ est le point x lui-même puisque pour tous les autres points $d(x, i) = 1 \not< \epsilon$. I est donc un ouvert de \mathbb{R} mais ce n'est pas tout. En effet, son complémentaire $]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$, par le même raisonnement, est également ouvert. L'intervalle I est donc un ouvert et un fermé de \mathbb{R} , alors que dans le premier exemple avec la métrique de Manhattan I était uniquement un ouvert de \mathbb{R} .
- (e) Comme nous venons de le constater, il existe des sous-ensembles qui sont à la fois des fermés et des ouverts de notre ensemble. Dans \mathbb{R} muni de n'importe quelle métrique, l'ensemble vide \emptyset et l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} en sont deux exemples.

Nous allons maintenant introduire deux lemmes qui nous permettront de démontrer un théorème qui nous sera utile pour la suite de notre travail. Le lemme suivant nous dit que, si $S \subset X$ est un fermé de X , alors toute suite convergente dans S a sa limite dans S .

1.4.3 Lemme *Soit (X, d) un espace métrique, $S \subset X$ un sous-ensemble fermé de X et (u_n) une suite dans S convergeant vers l . Alors $l \in S$.*

Démonstration

Supposons que $l \notin S$ et donc que $l \in X \setminus S$. Comme S est fermé, $X \setminus S$ est ouvert. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $B(l, \epsilon) \subset X \setminus S$, c'est-à-dire $\{x \in X \text{ tel que } d(x, l) < \epsilon\} \subset X \setminus S$. Pourtant, vu que (u_n) converge vers l , il existe N tel que $d(u_n, l) < \epsilon, \forall n > N$. Nous arrivons ainsi à une contradiction puisque la suite $(u_n) \in X$ converge dans la "boule" $B(l, \epsilon) \subset X \setminus S$. l appartient donc à S . ■

1.4.4 Lemme *Soit (X, d) un espace métrique complet et S un sous-ensemble fermé de X . Alors (S, d) est un espace métrique complet.*

Démonstration

Soit $(x_n) \in S$ une suite de Cauchy. Vu que (X, d) est un espace métrique complet, (x_n) converge vers un point $x \in X$. Comme S est fermé, toute suite convergente dans S a sa limite dans S . Nous obtenons ainsi que $x \in S$. ■

1.5 Ensembles bornés et totalement bornés

Les ensembles peuvent être bornés. Plus encore, ils peuvent être totalement bornés. Tout comme les ouverts et les fermés, nous verrons que les ensembles totalement bornés nous seront particulièrement utiles pour déterminer si un ensemble est compact ou non.

1.5.1 Définition Soit (X, d) un espace métrique et S un sous-ensemble de X .

(a) S est borné s'il existe un point $a \in X$ et un nombre $R > 0$ tel que

$$d(a, x) < R, \forall x \in S.$$

(b) S est totalement borné si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble fini de points $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset S$ tel que

$$\forall x \in S, \exists y_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \text{ avec } d(x, y_i) < \epsilon.$$

Cet ensemble de points $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est appelé un filet ϵ .

En d'autres termes, si S est borné, nous pouvons trouver une "sphère" de rayon R et de centre a de sorte qu'elle englobe S . D'autre part, si S est totalement borné, quel que soit le ϵ donné, il existe un ensemble fini de points $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset S$ de sorte que pour chaque $x \in S$, il existe un $y_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ tel que $d(x, y_i) \leq \epsilon$.

1.5.2 Exemple

Soit l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, \text{Euclidienne})$. Nous pouvons voir un ensemble borné sur la figure 1.2. La figure 1.3 représente un ensemble non-borné : en effet, nous ne pouvons pas trouver de R car le coin est infiniment étiré vers la droite. La figure 1.4 montre un ensemble totalement borné.

Les trois exemples précédents représentent des cas classiques et permettent de bien illustrer les définitions d'ensembles bornés et d'ensembles totalement bornés. Intéressons-nous d'avantage à la figure 1.3. Cette dernière est non-bornée avec la métrique euclidienne mais elle est bornée avec la métrique discrète $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$. En effet, peu importe que le point situé au coin du carré soit infiniment étiré puisqu'à partir du moment où x est différent de y la métrique retourne la valeur 1. Choisissons donc $R > 1$. Nous constatons ainsi qu'un ensemble est borné en fonction d'une métrique bien précise et que ce même ensemble peut ne plus l'être avec une autre métrique.

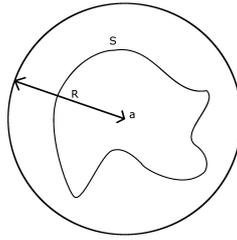


FIGURE 1.2 – Ensemble borné

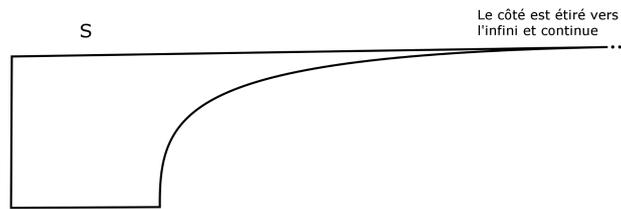


FIGURE 1.3 – Ensemble non-borné

Tout comme nous l'avons laissé sous-entendre dans l'introduction de cette section. Nous allons montrer que la notion d'ensemble totalement borné est plus forte que la notion d'ensemble borné, c'est-à-dire que la première entraîne la seconde.

1.5.3 Théorème *Soit (X, d) un espace métrique et S un sous-espace de X . Si S est totalement borné, alors il est borné.*

Démonstration

Soit $a \in S$, $\epsilon > 0$ et $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un filet ϵ . Posons $M = \max\{d(a, y_i)\}$ et $R = M + \epsilon$. Nous allons montrer que $d(a, s) < R, \forall s \in S$.

Soit $s \in S$. Par définition, $d(s, y_i) < \epsilon$ où y_i est l'un des y du filet ϵ . Posons que y_s soit le y correspondant, c'est-à-dire le y tel que $d(s, y_s) < \epsilon$. Analogiquement, posons y_m le y correspondant au y tel que $M = \max\{d(a, y_i)\} = d(a, y_m)$.

Si $y_s = y_m$, alors $M = d(a, y_m) = d(a, y_s)$. Nous avons

$$d(a, s) \leq d(a, y_s) + d(y_s, s) < M + \epsilon = R.$$

Si $y_s \neq y_m$, alors $M = d(a, y_m) > d(a, y_s)$. Nous avons

$$d(a, s) \leq d(a, y_s) + d(y_s, s) < d(a, y_m) + d(y_s, s) < M + \epsilon = R.$$

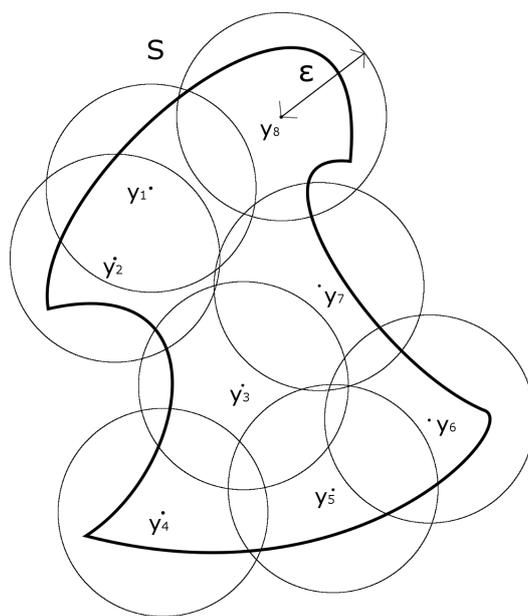


FIGURE 1.4 – Ensemble totalement borné

■

1.5.4 Exemple Remarquons que la réciproque n'est pas vraie. Reprenons l'exemple de la figure 1.3 avec la métrique discrète. Nous avons vu que l'ensemble est borné. Il n'est pourtant pas totalement borné. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ notre ensemble et $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ notre filet ϵ . Il suffit de prendre $0 < \epsilon \leq 1$. En effet, si un point $s \in S$ n'est pas l'un des y_i , la métrique discrète nous retourne la valeur 1, ce qui n'est pas inférieur à notre ϵ . La seule possibilité serait qu'il existe un $y_i = s, \forall s \in S$. Cependant, il existerait à ce moment-là une infinité de y_i . S n'est donc pas totalement borné.

1.6 Ensembles compacts

Nous arrivons enfin aux ensembles compacts. Ces derniers seront essentiels pour la suite de notre travail car c'est dans ces derniers que "vivent" les fractales. Commençons par la définition.

1.6.1 Définition Soit (X, d) un espace métrique et S un sous-ensemble de X . S est compact si toute suite dans S contient une sous-suite qui converge dans S .

Nous introduisons directement un théorème qui nous sera bien pratique pour la suite ainsi que pour illustrer les exemples d'ensembles compacts. C'est à partir d'ici que les notions de fermé et de totalement borné seront tout particulièrement utiles.

1.6.2 Théorème *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $S \subset X$. Alors S est compact si et seulement si il est fermé et totalement borné.*

Démonstration

Nous allons tout d'abord démontrer que si S est fermé et totalement borné, alors il est compact. Soit S un sous-ensemble de X totalement borné et fermé et $(x_n) \in S$ une suite de points dans S . Comme S est totalement borné, nous pouvons trouver un nombre fini de "boules" fermées de rayon 1 tel que S soit contenu dans l'union de ces boules. Faisons une analogie que nous nommerons le "principe du poulailler". Si une infinité de poules sont réparties dans deux poulaillers, au moins l'un des deux poulaillers contient une infinité de poules. De la même manière, il est certain qu'au moins une de ces boules, disons B_1 , contienne une infinité de points de la suite (x_n) (cela ne signifie pas pour autant qu'il y ait un nombre fini de points hors de B_1). Prenons j_1 tel que $x_{j_1} \in B_1$. Comme S est totalement borné, nous pouvons couvrir $\hat{B}_1 = B_1 \cap S$ par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$. Par le principe du poulailler, il est certain que l'une de ces boules, disons B_2 , contienne une infinité de points de (x_n) qui sont aussi dans \hat{B}_1 . Prenons j_2 tel que $x_{j_2} \in B_2 \cap \hat{B}_1$ et $j_2 > j_1$ ainsi que $\hat{B}_2 = B_2 \cap \hat{B}_1$. Nous continuons ainsi de suite pour créer une suite imbriquée de boules $\hat{B}_1 \supset \hat{B}_2 \supset \hat{B}_3 \supset \hat{B}_4 \supset \hat{B}_5 \supset \dots \supset \hat{B}_n \supset \dots$ où \hat{B}_n est inclu dans une boule de rayon $\frac{1}{2^{n-1}}$ et une suite d'entiers (j_n) tel que $x_{j_n} \in \hat{B}_n$. Nous remarquons que (x_{j_n}) est une sous-suite de la suite originelle (x_n) . De plus, (x_{j_n}) est une suite de Cauchy vu que ses points sont à chaque fois compris dans une boule de rayon décroissant. Vu que $S \subset X$ est fermé et que (X, d) est un espace métrique complet, nous savons par le lemme 1.4.4 que (S, d) est également un espace métrique complet. La suite (x_{j_n}) converge donc vers un point $x \in S$. S est ainsi compact.

Nous allons maintenant démontrer la réciproque. Soit S un sous-ensemble compact de X et $\epsilon > 0$. Supposons qu'il n'existe pas de filet ϵ pour S . Soit (x_n) une suite de points dans S avec $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ pour tout $i \neq j$. Cependant, cette suite doit posséder une sous-suite convergente (x_{v_n}) . Comme (x_{v_n}) est convergente, nous savons par le théorème 1.2.4 que c'est une suite de Cauchy et donc qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(x_{v_i}, x_{v_j}) < \epsilon$ pour tout $i, j > N$. Pourtant, nous avons $d(x_{v_i}, x_{v_j}) \geq \epsilon$. Nous arrivons à une contradiction. Par conséquent, il existe bien un filet ϵ . S est donc totalement borné. Nous allons maintenant démontrer par contraposition que S est fermé. Supposons que S ne soit pas fermé et donc que $X \setminus S$ ne soit pas ouvert. Il existe alors $p \in X \setminus S$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, $B(p, \epsilon) \not\subset X \setminus S$. En particulier,

nous avons $B(p, \frac{1}{k}) \not\subset X \setminus S$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $k = 1$, il existe $u_1 \notin X \setminus S$ et donc $u_1 \in S$ tel que $d(u_1, p) < 1$. De la même manière, pour $k = 2$, il existe $u_2 \in S$ tel que $d(u_2, p) < \frac{1}{2}$, pour $k = 3$, $u_3 \in S$ tel que $d(u_3, p) < \frac{1}{3}$, ..., pour $k = n$, $u_n \in S$ tel que $d(u_n, p) < \frac{1}{n}$. Nous formons ainsi une suite (u_k) dans S qui converge vers p . Comme S est compact, (u_k) doit posséder une sous-suite (u_{k_j}) qui converge dans S . Or toutes les sous-suites de (u_k) convergent vers p qui n'appartient pas à S . Nous arrivons alors à une contradiction. S est donc fermé. ■

1.6.3 Exemples

- (a) Soit (\mathbb{R}^2, d) un espace métrique où d est la métrique euclidienne. La "boule" fermée de centre $(1; 1)$ et de rayon $r = \frac{1}{4}$ est compacte. Comme nous venons de le voir, tout ensemble totalement borné et fermé est compact. Par conséquent, toute "boule" fermée est compacte dans \mathbb{R}^2 avec la métrique euclidienne.
- (b) Toujours par le même raisonnement, tout segment fermé est compact dans \mathbb{R} avec la métrique de Manhattan.
- (c) Soit (\mathbb{R}, d) un espace métrique où d est la métrique de Manhattan et un intervalle $I =]0, 1[$. Soit $(u_n) = (\frac{1}{n+1})$ une suite dans I convergeant vers 0. Cette dernière étant strictement décroissante, n'importe quelle sous-suite de (u_n) le sera également et convergera vers 0. Or, la valeur 0 n'appartient pas à I . L'intervalle $]0, 1[$ n'est donc pas compact. Une manière beaucoup plus simple et rapide serait d'argumenter de la façon suivante : L'intervalle I n'est pas fermé et donc n'est pas compact.
- (d) Remarquons qu'un ensemble est compact en fonction de sa métrique. Soit (\mathbb{R}, d) un espace métrique et $I = [0, 1]$ un intervalle dans \mathbb{R} . Si d est la métrique discrète, l'intervalle I n'est pas totalement borné et donc pas compact. Tandis que si d est la métrique de Manhattan, l'intervalle I est fermé et totalement borné et donc compact.

Chapitre 2

Applications contractantes et théorème du point fixe de Banach

Dans cette section, nous allons introduire une dernière notion essentielle au théorème du point fixe de Banach : les applications contractantes. Nous verrons ensuite que cette sorte de fonction possède des propriétés bien particulières. Après avoir introduit et expliqué le théorème de Banach, nous nous servirons de celles-ci afin de le démontrer.

2.1 Applications contractantes

Commençons tout de suite par la définition.

2.1.1 Définition *Soit un espace métrique (X, d) . La fonction $f : X \rightarrow X$ est appelée application contractante s'il existe une constante $0 \leq s < 1$ tel que*

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

La constante s est appelée facteur de contraction de f .

En d'autres termes, il faut que la distance entre les images soit strictement plus petite que la distance entre les préimages pour qu'il y ait une contraction, une réduction. De plus, le rapport des distances entre les images et les préimages doit être strictement inférieur à 1. Prenons un exemple basique dans \mathbb{R}^2 .

2.1.2 Exemple

Les homothéties avec un rapport k , où $0 < k < 1$, sur un espace euclidien dans \mathbb{R}^2 sont des applications contractantes de facteur de contraction k (voir figure 2.1). Nous n'insistons pas plus sur les exemples puisque toutes les fractales du chapitre 4 sont constituées à partir d'applications contractantes.

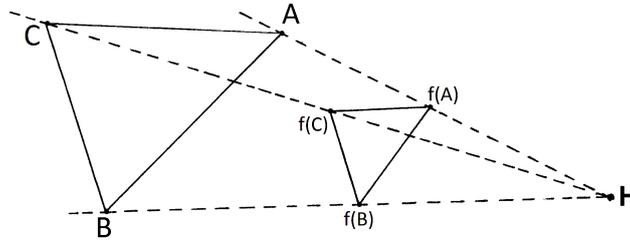


FIGURE 2.1 – Homothétie

Nous introduisons maintenant une notation qui nous sera pratique pour présenter les diverses propriétés des applications contractantes.

2.1.3 Définition La notation $f^{on}(x)$ signifie que nous appliquons n fois la fonction f à x . Pour $n = 0$, nous avons que $f^{on}(x) = x$. Par exemple, $f^{o3}(x) = f(f(f(x)))$.

A partir de la définition des applications contractantes, nous allons déduire quatre propriétés et les démontrer. Celles-ci nous serviront pour la démonstration du théorème du point fixe de Banach.

2.1.4 Propriétés Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une application contractante de facteur de contraction s .

- (1) $d(f^{on}(x), f^{on}(y)) \leq s^n \cdot d(x, y), \forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x, y \in X$.
- (2) $d(f^{on}(x), f^{om}(x)) \leq s^{m \wedge n} \cdot d(x, f^{o|n-m|}(x)), \forall m, n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in X$. La notation $u \wedge v$ signifie que nous prenons le plus petit des deux nombres.
- (3) Les applications contractantes sont des fonctions continues.
- (4) Soit $(u_n) \in X$ une suite qui converge vers l . Alors $f(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous allons maintenant démontrer ces quatre propriétés.

- (1) Nous allons démontrer que $d(f^{on}(x), f^{on}(y)) \leq s^n \cdot d(x, y), \forall n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Démontrons le par récurrence.

L'ancrage $d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$ est vérifié par la définition de l'application contractante.

L'hypothèse de récurrence est $d(f^{\circ n}(x), f^{\circ n}(y)) \leq s^n \cdot d(x, y)$.

La conclusion de récurrence est $d(f^{\circ(n+1)}(x), f^{\circ(n+1)}(y)) \leq s^{n+1} \cdot d(x, y)$.

Nous partons du membre gauche de la conclusion et par définition de l'application contractante nous avons

$$d(f^{\circ(n+1)}(x), f^{\circ(n+1)}(y)) \leq s \cdot d(f^{\circ n}(x), f^{\circ n}(y)).$$

Puis, par l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$s \cdot d(f^{\circ n}(x), f^{\circ n}(y)) \leq s \cdot s^n \cdot d(x, y) = s^{n+1} \cdot d(x, y).$$

■

- (2) Nous allons démontrer que $d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^{m \wedge n} \cdot d(x, f^{\circ |n-m|}(x)), \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Dans un premier temps, nous allons démontrer l'inéquation dans le cas où $n \geq m$. Dans ce cas, nous avons $m \wedge n = m$ et $|n - m| = n - m$. Nous devons donc montrer que

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^m \cdot d(x, f^{\circ(n-m)}(x)).$$

Pour le membre de gauche de l'inéquation, nous avons

$$\begin{aligned} d(f^{\circ m}(x), f^{\circ n}(x)) &= d(f^{\circ m}(x), f^{\circ(n-m+m)}(x)) \\ &= d(f^{\circ m}(x), f^{\circ m}(f^{\circ(n-m)}(x))). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Et par la propriété 1 des applications contractantes, nous pouvons écrire

$$d(f^{\circ m}(x), f^{\circ m}(f^{\circ(n-m)}(x))) \leq s^m \cdot d(x, f^{\circ(n-m)}(x)). \tag{2.2}$$

Des équations (2.1) et (2.2), nous avons

$$d(f^{\circ m}(x), f^{\circ n}(x)) \leq s^m \cdot d(x, f^{\circ(n-m)}(x)). \tag{2.3}$$

Maintenant, traitons le cas où $n < m$, par le même raisonnement, nous avons

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) = d(f^{\circ m}(x), f^{\circ n}(x)) \leq s^n \cdot d(x, f^{\circ(m-n)}(x)). \quad (2.4)$$

Finalement, des inéquations (2.3) et (2.4), nous obtenons

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^{m \wedge n} \cdot d(x, f^{\circ|n-m|}(x)).$$

■

(3) Les applications contractantes sont des fonctions continues.

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$, $x \in X$ et $0 < s < 1$ le facteur de contraction de f . Nous devons montrer qu'il existe δ tel que $d(x, y) < \delta$ implique que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Comme f est une application contractante, nous avons

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Nous voulons avoir les inégalités suivantes :

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \leq \epsilon, \forall x, y \in X.$$

Nous posons alors $\delta = \frac{\epsilon}{s}$ et nous obtenons

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon, \forall x, y \in X.$$

Si $s = 0$, quel que soit le $\epsilon > 0$, nous avons $d(f(x), f(y)) = 0 < \epsilon, \forall x, y \in X$. L'inéquation est donc remplie quel que soit le δ choisi. ■

(4) Soit un espace métrique (X, d) , une application contractante $f : X \rightarrow X$, un point $l \in X$ et (u_n) une suite qui converge vers l . Alors $f(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(u_n))$.

Démonstration

D'après la propriété (3), nous savons que les applications contractantes sont des fonctions continues. De plus, le lemme 1.2.6 affirme que si la fonction est continue, alors pour toute suite $(u_n) \in X$ qui converge vers l , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$. Comme la suite (u_n) converge vers l , nous avons donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(l) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n))$, ce qui complète la preuve. ■

2.2 Théorème du point fixe de Banach

Nous arrivons enfin au théorème du point fixe de Banach. C'est la clef centrale qui nous permettra par la suite de construire des fractales.

2.2.1 Théorème *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une application contractante. Alors f possède exactement un point fixe $l \in X$ et de plus pour tout point $x \in X$, la suite $(f^{\circ n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Nous avons donc,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = l, \forall x \in X$$

Nous allons décomposer la démonstration en deux grandes parties. La première consistera tout d'abord à démontrer que $f^{\circ n}(x)$ est une suite de Cauchy et qu'elle converge vers un point l , puis à prouver que le point l est un point fixe. La deuxième aura pour but de démontrer l'unicité du point fixe l .

2.2.1 Existence du point fixe

Démonstration

Soit $x \in X$, $m, n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s < 1$ un facteur de contraction de f . Alors, par le point 2 des propriétés 2.1.4, nous avons

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^{m \wedge n} \cdot d(x, f^{\circ k}(x)), \quad k = |n - m|. \quad (2.5)$$

Grâce à la propriété 1.0.3 des espaces métriques page 11, nous pouvons écrire

$$d(x, f^{\circ k}(x)) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^{\circ 2}(x)) + \dots + d(f^{\circ k-1}(x), f^{\circ k}(x)). \quad (2.6)$$

De plus, par le point 2 des applications contractantes 2.1.4, nous avons

$$\begin{aligned} & d(x, f(x)) + d(f(x), f^{\circ 2}(x)) + \dots + d(f^{\circ k-1}(x), f^{\circ k}(x)) \\ & \leq d(x, f(x)) + s \cdot d(x, f(x)) + s^2 \cdot d(x, f(x)) + \dots + s^{k-1} \cdot d(x, f(x)) \\ & = (1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1}) \cdot d(x, f(x)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Comme $(1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1})$ est la somme de k termes d'une suite géométrique qui vaut $1 \cdot \frac{1-s^k}{1-s}$ et que $0 \leq s < 1$, nous avons $1 - s^{k-1} \leq 1$ et nous pouvons alors poser l'inéquation

$$\frac{1 - s^{k-1}}{1 - s} \cdot d(x, f(x)) \leq \frac{1}{1 - s} \cdot d(x, f(x)). \quad (2.8)$$

Des inéquations (2.6) à (2.8), nous déduisons

$$d(x, f^{\circ k}(x)) \leq \frac{1}{(1 - s)} \cdot d(x, f(x)) \quad (2.9)$$

et donc

$$d(x, f^{\circ k}(x)) = d(x, f^{\circ |n-m|}) \leq \frac{1}{1 - s} \cdot d(x, f(x)). \quad (2.10)$$

En substituant l'équation (2.6) dans l'équation (2.10). Nous avons alors

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^{m \wedge n} \frac{1}{1 - s} \cdot d(x, f(x)).$$

En posant $q = \frac{1}{1-s} \cdot d(x, f(x))$ qui est une valeur fixe (en fonction du point choisi), nous avons $d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^{m \wedge n} \cdot q$. Comme $0 \leq s < 1$ pour tout $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver N tel que $d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) < \epsilon$ pour tout $\forall m, n > N$. Par conséquent, la suite $(f^{\circ n}(x))$ est une suite de Cauchy et comme nous sommes dans un espace complet, elle possède une limite $l \in X$. Prouvons maintenant que c'est une point fixe, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = l.$$

Alors

$$f(l) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)\right)$$

et par le point 4 des applications contractantes 2.1.4 nous avons

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(f^{\circ n}(x))) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ(n+1)}(x) = l.$$

Par conséquent, l est un point fixe de la suite $(f^{\circ n}(x))$.

■

2.2.2 Unicité du point fixe

Démonstration

Supposons qu'il y ait deux points fixes l et l' . Alors $l = f(l)$, $l' = f(l')$. Nous avons donc

$$d(l, l') = d(f(l), f(l')). \quad (2.11)$$

Si s est un facteur de contraction de f , nous avons

$$d(f(l), f(l')) \leq s \cdot d(l, l'). \quad (2.12)$$

Des inéquations (2.11) et (2.12), nous déduisons

$$\begin{aligned} d(l, l') &\leq s \cdot d(l, l') \\ \Leftrightarrow d(l, l') - s \cdot d(l, l') &\leq 0 \\ \Leftrightarrow d(l, l')(1 - s) &\leq 0 \end{aligned}$$

Vu que $0 \leq s < 1$ et que $d(l, l') \geq 0$, il faut que $d(l, l') = 0$ pour remplir l'inéquation. Et par l'axiome (3) des espaces métriques, nous avons $l = l'$ donc le point fixe est unique.

■

En le combinant avec un autre théorème, ce théorème nous servira à construire nos fractales. Remarquons que le théorème du point fixe de Banach peut être utilisé à d'autres fins. Il est par exemple utilisé pour la résolution d'équations numériques et différentielles. Pour de plus amples informations, vous pouvez consulter [14].

Application du théorème de Banach aux fractales

Dans cette section, nous allons tout d'abord définir l'espace des fractales ainsi qu'une nouvelle métrique, la métrique de Hausdorff. Puis, nous montrerons que l'espace des fractales remplit les conditions du théorème du point fixe de Banach. Nous démontrerons alors un dernier théorème qui nous sera extrêmement pratique pour créer nos fractales.

3.1 Espaces des fractales

Pour parler de fractales dans des espaces métriques, il est pratique d'introduire l'espace \mathcal{H} .

3.1.1 Définition *Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors $\mathcal{H}(X)$ représente l'espace dont les points sont les sous-ensembles compacts non vides de X .*

Pour définir une métrique sur $\mathcal{H}(X)$, nous avons tout d'abord besoin de définir la distance entre un point et un ensemble compact ainsi que la distance entre deux ensembles compacts, ce qui nous amène aux définitions suivantes.

3.1.2 Définition *Soit (X, d) un espace métrique complet, un point $x \in X$ et un ensemble compact $B \in \mathcal{H}(X)$. Nous définissons*

$$d(x, B) = \min_{y \in B} \{d(x, y)\}.$$

$d(x, B)$ est appelé la distance entre le point x et l'ensemble compact B .

Notez que cette mesure de distance n'est pas une métrique car cette fonction n'est pas définie sur un ensemble de la forme $X \times X$.

Cette définition part du principe que l'ensemble de nombres réels $\{d(x, y)_{y \in B}\}$ contient une valeur minimale. Cette dernière existe en raison de la compacité de l'espace $B \in \mathcal{H}(X)$. Pour de plus amples informations, consultez [Bar93] à la page 29.

Nous nous servons de la définition précédente pour définir la distance entre deux ensembles compacts.

3.1.3 Définition Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Nous définissons

$$d(A, B) = \max_{x \in A} \{d(x, B)\}.$$

$D(A, B)$ est appelé la distance entre l'ensemble compact $A \in \mathcal{H}(X)$ et l'ensemble compact $B \in \mathcal{H}(X)$.

Notez que cette mesure de distance n'est pas non plus une métrique. Prenons un exemple. Soit (X, d) un espace métrique complet, $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Par définition de la métrique, nous avons

$$\begin{aligned} d(A, B) &= d(B, A) \\ \Leftrightarrow \max_{x \in A} \{d(x, B)\} &= \max_{y \in B} \{d(y, A)\} \\ \Leftrightarrow \max_{x \in A} \{ \min_{y \in B} \{d(x, y)\} \} &= \max_{y \in B} \{ \min_{x \in A} \{d(y, x)\} \}, \end{aligned}$$

ce qui n'est pas forcément égal comme nous pouvons le voir sur la figure 3.1. Cette mesure de distance n'est donc pas une métrique.

Comme dans le point précédent, la compacité de A et B permet de prouver l'existence d'un maximum et ainsi de justifier cette définition. Pour de plus amples informations, consultez [Bar93] à la page 29.

Nous pouvons déduire deux lemmes à partir de la définition de la distance entre un point et un ensemble compact ainsi que la définition entre deux ensembles compacts.

3.1.4 Lemme Soit (X, d) un espace métrique et $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ trois sous-ensembles compacts de X . Nous avons $d(A \cup B, C) = d(A, C) \vee d(B, C)$. La notation \vee signifie que nous prenons le plus grand des deux nombres.

Démonstration

Par définition, nous avons $d(A \cup B, C) = \max_{x \in A \cup B} d(x, C) = \max_{x \in A} d(x, C) \vee \max_{x \in B} d(x, C) = d(A, C) \vee d(B, C)$. ■

3.1.5 Lemme *Soit (X, d) un espace métrique et $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ trois sous-ensembles compacts de X . Nous avons $d(A, B \cup C) \leq d(A, B)$ et $d(A, B \cup C) \leq d(A, C)$.*

Démonstration

Pour tout $\alpha \in A$, nous avons

$$\min_{\Delta \in B \cup C} \{d(\alpha, \Delta)\} \leq \min_{\Delta \in B} \{d(\alpha, \Delta)\}.$$

Nous obtenons donc que

$$\max_{\alpha \in A} \left\{ \min_{\Delta \in B \cup C} \{d(\alpha, \Delta)\} \right\} \leq \max_{\alpha \in A} \left\{ \min_{\Delta \in B} \{d(\alpha, \Delta)\} \right\}.$$

Nous avons ainsi $d(A, B \cup C) \leq d(A, B)$ et, par le même raisonnement, nous avons $d(A, B \cup C) \leq d(A, C)$. ■

Nous allons maintenant introduire la distance de Hausdorff qui est capitale pour notre théorème. En effet, elle est employée dans $\mathcal{H}(X)$ et permet de calculer des distances entre des ensembles compacts, tout en étant une métrique.

3.1.6 Définition *Soit (X, d) un espace métrique complet, alors la distance de Hausdorff entre les points A et B dans $\mathcal{H}(X)$ est définie par*

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A).$$

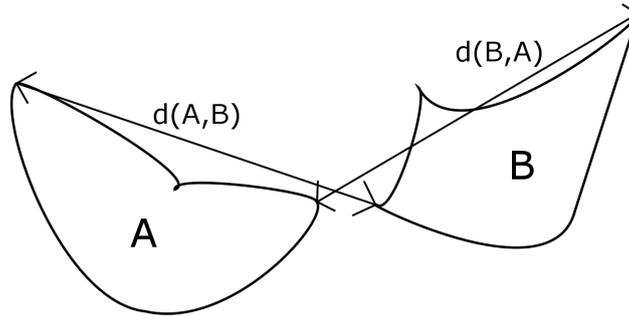


FIGURE 3.1 – Distance de Hausdorff dans $(\mathbb{R}^2, \text{euclidien})$

Remarquez que la distance de Hausdorff s'applique également lorsque les ensembles compacts possèdent des points en commun (voir figure 3.2). Il peut aussi arriver

qu'un des ensembles compacts soit entièrement compris dans l'autre. Soit (X, d) un espace métrique complet et $A, B \in \mathcal{H}(X)$ deux sous-ensembles compacts de X . Si $A \subset B$, alors $d(A, B) = 0$ et $h(A, B)$ retournera la distance entre B et A , soit $d(B, A)$.

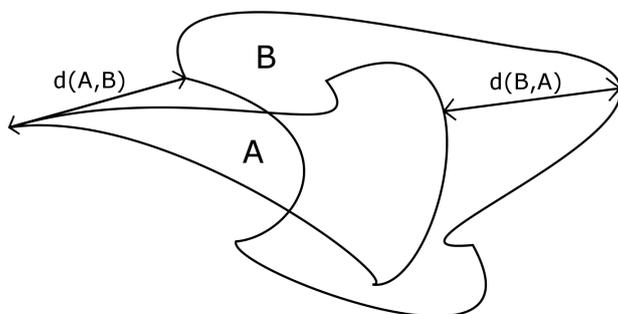


FIGURE 3.2 – Distance de Hausdorff dans $(\mathbb{R}^2, euclidien)$

3.1.7 Lemme Soit A et $B \in \mathcal{H}(X)$ deux sous-ensembles compacts de l'espace métrique (X, d) . La distance de Hausdorff $h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A)$ est une métrique.

Pour voir une démonstration complète, consultez [Bar93] à la page 33.

$\mathcal{H}(X)$ est l'espace où "vivent" nos fractales. A partir de maintenant, lorsque nous parlerons de points dans $\mathcal{H}(X)$, il s'agira d'ensembles compacts. Un point peut par exemple représenter un volume, une figure ou une forme. Nous pouvons l'observer sur la figure 3.3 : la tête est un point. Le corps en est aussi un. L'union de ces deux points, c'est-à-dire le personnage tout entier, est également un point.

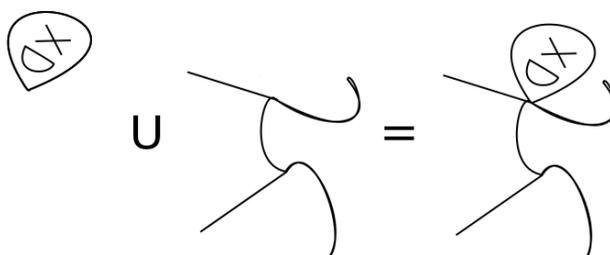


FIGURE 3.3 – Des points dans $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$

Nous pouvons désormais travailler sur l'espace des fractales à l'aide de l'espace métrique $(\mathcal{H}(X), h)$. Cependant, nous ne pouvons pas y appliquer le théorème du point

fixe de Banach. En effet, il reste à démontrer que l'espace des fractales répond aux conditions du théorème, ce qui nous amène au théorème ci-dessous : la complétude de l'espace des fractales.

3.1.8 Théorème *Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors $(\mathcal{H}(X), h)$ est un espace métrique complet. De plus, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{H}(X)$ est une suite de Cauchy, alors*

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}(X).$$

La démonstration de la complétude de l'espace fractale est malheureusement hors de notre portée. Pour une démonstration complète, consultez [Bar93] aux pages 35 à 37. La complétude de l'espace des fractales est l'un des trois théorèmes fondamentaux de notre travail et permet de répondre à la première condition du théorème du point fixe de Banach.

3.2 Applications contractantes sur l'espace fractale

Jusqu'à présent, nous n'avons donné qu'une définition abstraite et vulgarisée du terme "fractale" car il n'en existe pas à proprement dit. Cependant, bien que cette définition soit restreignante, nous pouvons entre autres dire que c'est le point fixe d'une application contractante sur $(\mathcal{H}(X), h)$. Dans cette section, nous allons d'abord introduire plusieurs lemmes nous permettant d'arriver à un dernier théorème. Celui-ci englobe le théorème de Banach qui nous sera nécessaire à la création de nos fractales. Nous allons ainsi donner une méthode de construction d'applications contractantes sur l'espace métrique $(\mathcal{H}(X), h)$.

Commençons par introduire et démontrer les quatre lemmes suivants.

3.2.1 Lemme *Soit $w : X \rightarrow X$ une application contractante sur l'espace métrique (X, d) et $S \in \mathcal{H}(X)$. Alors w induit une application $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ avec $w(S) = \{w(x) : x \in S\}$.*

Démonstration

Soit $S \subset X$ un sous-ensemble compact et non vide. Alors $w(S) = \{w(x) : x \in S\}$ est non vide. Nous voulons montrer que $w(S)$ est compact. Soit $(y_n) = (w(x_n))$ une suite de points dans $w(S)$. Alors (x_n) est une suite de points dans S . Vu que S est compact, il existe une sous-suite (x_{j_n}) qui converge vers un point $l \in S$. Par le point 3 des propriétés des applications contractantes 2.1.4, w est continue. De ce fait, nous avons

$(y_{j_n}) = w((x_{j_n}))$ qui est une sous-suite de (y_n) et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{j_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} w((x_{j_n}))$. Puis, par le lemme 1.2.6, nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} w(x_{j_n}) = w(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{j_n})) = w(l) = l' \in w(S)$. ■

3.2.2 Lemme *Soit $w : X \rightarrow X$ une application contractante sur l'espace métrique (X, d) avec un facteur de contraction s . Alors $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ est une application contractante sur $(\mathcal{H}(X), h)$ avec un facteur de contraction s .*

Démonstration

Soit $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} d(w(B), w(C)) &= \max_{x \in B} \{ \min_{y \in C} \{ d(w(x), w(y)) \} \} \\ &\leq \max_{x \in B} \{ \min_{y \in C} \{ s \cdot d(x, y) \} \} \\ &= s \cdot \max_{x \in B} \{ \min_{y \in C} \{ d(x, y) \} \} \\ &= s \cdot d(B, C) \end{aligned}$$

Par la même démarche, nous avons $d(w(C), w(B)) \leq s \cdot d(C, B)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} h(w(B), w(C)) &= d(w(B), w(C)) \vee d(w(C), w(B)) \\ &\leq s \cdot d(B, C) \vee s \cdot d(C, B) \\ &= s \cdot (d(B, C) \vee d(C, B)) \\ &= s \cdot h(B, C). \end{aligned}$$

■

Le premier lemme nous dit que si w est une application contractante allant de X vers X , elle induit une application de $\mathcal{H}(X)$ vers $\mathcal{H}(X)$. Le deuxième lemme affirme que si w est une application contractante, alors l'application allant de $\mathcal{H}(X)$ vers $\mathcal{H}(X)$ est également contractante.

Le lemme qui suit nous permettra de démontrer le suivant.

3.2.3 Lemme *Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $B, C, D, E \in \mathcal{H}(X)$*

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq h(B, D) \vee h(C, E).$$

Démonstration

Par définition de la distance de Hausdorff, nous avons

$$\begin{aligned} h(B \cup C, D \cup E) &\leq h(B, D) \vee h(C, E) \\ \Leftrightarrow d(B \cup C, D \cup E) \vee d(D \cup E, B \cup C) &\leq d(B, D) \vee d(D, B) \vee d(C, E) \vee d(E, C). \end{aligned}$$

Nous partons maintenant du membre de gauche. Par le lemme 3.1.4, nous avons

$$\begin{aligned} d(B \cup C, D \cup E) \vee d(D \cup E, B \cup C) \\ = d(B, D \cup E) \vee d(C, D \cup E) \vee d(D, B \cup C) \vee d(E, B \cup C). \end{aligned}$$

Puis, par le lemme 3.1.5, nous avons

$$\begin{aligned} d(B, D \cup E) \leq d(B, D); \quad d(C, D \cup E) \leq d(C, E); \\ d(D, B \cup C) \leq d(D, B); \quad d(E, B \cup C) \leq d(E, C). \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} d(B, D \cup E) \vee d(C, D \cup E) \vee d(D, B \cup C) \vee d(E, B \cup C) \\ \leq d(B, D) \vee d(D, B) \vee d(C, E) \vee d(E, C) \\ = h(B, D) \vee h(C, E). \end{aligned}$$

■

3.2.4 Lemme Soit (X, d) un espace métrique, w_n des applications contractantes de facteur de contraction s_n sur $(\mathcal{H}(X), h)$ pour $n = 1, 2, \dots, N$. Nous définissons $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ tel que

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B), \forall B \in \mathcal{H}(X).$$

Alors W est une application contractante avec un facteur de contraction $s = \max\{s_n\}$

Démonstration

Nous le démontrons par récurrence.

Vérifions l'ancrage pour $N = 2$. Soit $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Nous avons

$$h(W(B), W(C)) = h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C))$$

Par le Lemme 3.2.3 nous avons

$$\begin{aligned} h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) &\leq h(w_1(B), w_1(C)) \vee h(w_2(B), w_2(C)) \\ &\leq s_1 h(B, C) \vee s_2 h(B, C) = sh(B, C). \end{aligned}$$

L'ancrage est vérifié.

L'hypothèse de récurrence est $h(W(B), W(C)) = h(\bigcup_{n=1}^N w_n(B), \bigcup_{n=1}^N w_n(C)) \leq \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\} \cdot h(B, C)$.

La conclusion de récurrence est $h(W(B), W(C)) = h(\bigcup_{n=1}^{N+1} w_n(B), \bigcup_{n=1}^{N+1} w_n(C)) \leq \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N, N + 1\} \cdot h(B, C)$.

Nous partons du membre gauche de la conclusion

$$\begin{aligned} &h(W(B), W(C)) \\ &= h(\bigcup_{n=1}^{N+1} w_n(B), \bigcup_{n=1}^{N+1} w_n(C)) \\ &= h(\bigcup_{n=1}^N w_n(B) \cup w_{N+1}(B), \bigcup_{n=1}^N w_n(C) \cup w_{N+1}(C)). \end{aligned}$$

Du lemme 3.2.3 nous déduisons que

$$\begin{aligned} &h(\bigcup_{n=1}^N w_n(B) \cup w_{N+1}(B), \bigcup_{n=1}^N w_n(C) \cup w_{N+1}(C)) \\ &\leq h(\bigcup_{n=1}^N w_n(B), \bigcup_{n=1}^N w_n(C)) \vee h(w_{N+1}(B), w_{N+1}(C)). \end{aligned}$$

Nous insérons alors l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} &h(\bigcup_{n=1}^N w_n(B), \bigcup_{n=1}^N w_n(C)) \vee h(w_{N+1}(B), w_{N+1}(C)) \\ &\leq \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\} \cdot h(B, C) \vee s_{N+1} \cdot h(B, C) \\ &= \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N, N + 1\} \cdot h(B, C) \end{aligned}$$

■

Ce dernier lemme affirme que si nous avons un ensemble d'applications contractantes sur $(\mathcal{H}(X), h)$, alors l'union de ces applications contractantes est également une application contractante sur $(\mathcal{H}(X), h)$.

3.2.5 Définition *Un système de fonctions itérées consiste en un espace complet (X, d) avec une suite finie d'applications contractantes $w_n : X \rightarrow X$ avec leurs facteurs de contraction respectifs s_n pour $n = 1, 2, \dots, N$. Nous le noterons $\{X; w_n\}$ et définissons que son facteur de contraction est $s = \max\{s_n\}$.*

Le nom "système de fonctions itérées" est en fait la traduction du terme anglais "iterated function system", souvent abrégé en IFS. Nous utiliserons parfois l'acronyme "IFS" afin d'alléger l'écriture.

Tous les lemmes précédents nous permettent désormais de déduire le théorème suivant.

3.2.6 Théorème *Soit $\{X, w_n\}$ pour $n = 1, 2, \dots, N$ un IFS avec un facteur de contraction s . Alors la transformation $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ définie par*

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B), \forall B \in \mathcal{H}(X),$$

est une application contractante sur l'espace métrique complet $(\mathcal{H}(X), h)$ avec un facteur de contraction s et nous avons

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C), \forall B, C \in \mathcal{H}(X).$$

Il possède un unique point fixe $A \in \mathcal{H}(X)$, tel que

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

et

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B), \forall B \in \mathcal{H}(X).$$

3.2.7 Définition *Le point fixe $A \in \mathcal{H}(X)$ décrit dans le théorème ci-dessus est appelé attracteur de famille de contraction, souvent abrégé par l'acronyme AFC.*

Ce théorème est le troisième théorème fondamental de notre travail. Il nous affirme que si w_n est un ensemble fini d'applications contractantes dans X , alors l'union de ses applications contractantes est une application contractante dans $\mathcal{H}(X)$. Il permet ainsi de travailler avec des ensembles d'applications contractantes sur $\mathcal{H}(X)$, l'espace des fractales. De plus, il garantit l'existence d'un unique point fixe, l'attracteur de famille de contraction, qui n'est rien d'autre que notre fractale. A partir de là, il nous suffit simplement de travailler sur l'espace métrique complet $(\mathcal{H}(X), h)$, de déterminer nos applications contractantes w_n et d'itérer notre fonction W un certain nombre de fois sur un quelconque compact pour approcher notre fractale, ce qui nous amène à la section suivante : construction de fractales sur \mathbb{R}^2 à l'aide d'IFS.

Construction de fractales sur \mathbb{R}^2 à l'aide d'IFS

Nous allons maintenant appliquer la théorie des chapitres précédents. Nous allons créer des fractales à l'aide d'IFS. La fractale étant le point fixe de l'IFS, c'est en fait notre AFC. Dans ce dernier chapitre, nous allons présenter quelques fractales dans \mathbb{R}^2 muni de la métrique euclidienne. Nous les construirons à l'aide de Mathematica. Le code utilisé a été développé à l'université de Rhodes Island par Mustafa Kulenovic et Joe DeAlmo (voir le lien internet [1]). Nous l'avons modifié et nous y avons ajouté quelques IFS.

4.1 Applications sur \mathbb{R}^2

Nous voulons appliquer le théorème 3.2.6 sur l'espace métrique (\mathbb{R}^2, d) où d est la métrique euclidienne. Pour se faire, nous avons besoin d'applications contractantes. Dans cet espace, un point sera par conséquent noté $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Nous allons donc présenter quelques applications sur \mathbb{R}^2 avec lesquelles nous pourrions former nos applications contractantes.

- (1) Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. H_k est une *homothétie* de rapport k et est définie de la manière suivante : $H_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

- (2) Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. $T_{\vec{t}}$ est une *translation* de vecteur \vec{t} et est définie de la manière suivante : $T_{\vec{t}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \vec{t} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$.
- (3) Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. R_α est une *rotation* d'angle α sur l'origine et est définie de la manière suivante : $R_\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot x_1 - \sin(\alpha) \cdot x_2 \\ \sin(\alpha) \cdot x_1 + \cos(\alpha) \cdot x_2 \end{pmatrix}$.
- (4) Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. S_A est une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées et est définie de la manière suivante : $S_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Avant de s'intéresser à leur propriété, définissons tout d'abord ce qu'est une isométrie.

4.1.1 Définition Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une fonction. Alors f est une isométrie si

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)), \forall x, y \in X.$$

4.1.2 Propriétés Soit $(\mathbb{R}^2, \text{euclidienne})$ et un point $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dans \mathbb{R}^2 .

- (a) Soit H_k une homothétie de rapport $k \in [0, 1[$. Alors H_k est une application contractante de facteur de contraction k .
- (b) Soit $T_{\vec{t}}$ une translation. Alors $T_{\vec{t}}$ est une isométrie.
- (c) Soit R_α une rotation. Alors R_α est une isométrie.
- (d) Soit S_A une symétrie axiale sur l'axe des ordonnées. Alors S_A est une isométrie.

Démontrons maintenant chacune de ces propriétés.

- (1) Une homothétie H_k est une application contractante dans \mathbb{R}^2 si $k \in [0, 1[$.

Démonstration

Soit s un facteur de contraction. Nous avons

$$\begin{aligned}d(H_k(x), H_k(y)) &= \sqrt{(k \cdot y_1 - k \cdot x_1)^2 + (k \cdot y_2 - k \cdot x_2)^2} \\&= \sqrt{k^2 \cdot (y_1 - x_1)^2 + k^2 \cdot (y_2 - x_2)^2} \\&= k \cdot \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\&= k \cdot d(x, y) \\&= k \leq s\end{aligned}$$

donc k est notre facteur de contraction. ■

(2) Toute translation $T_{\vec{t}}$ dans \mathbb{R}^2 est une isométrie.

Démonstration

$$\begin{aligned}d(T_{\vec{t}}(x), T_{\vec{t}}(y)) &= \sqrt{(y_1 + t_1 - x_1 - t_1)^2 + (y_2 + t_2 - x_2 - t_2)^2} \\&= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\&= d(x, y)\end{aligned}$$
■

(3) Toute rotation R_α dans \mathbb{R}^2 est une isométrie.

Démonstration

Pour le démontrer, nous allons d'abord effectuer l'expression. Puis, nous obtiendrons des $\cos^2(\alpha)$ ainsi que des $\sin^2(\alpha)$. Comme $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, nous substituerons les $\sin^2(\alpha)$ par $1 - \cos^2(\alpha)$. Nous verrons que les termes se simplifient.

$$\begin{aligned}
 & d(R_\alpha(x), R_\alpha(y)) \\
 &= \left((\cos(\alpha) \cdot y_1 - \sin(\alpha) \cdot y_2 - \cos(\alpha) \cdot x_1 + \sin(\alpha) \cdot x_2)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (\sin(\alpha) \cdot y_1 + \cos(\alpha) \cdot y_2 - \sin(\alpha) \cdot x_1 - \cos(\alpha) \cdot x_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\cos^2(\alpha) \cdot x_1^2 + \sin^2(\alpha) \cdot x_1^2 + \cos^2(\alpha) \cdot x_2^2 + \sin^2(\alpha) \cdot x_2^2 \right. \\
 &\quad - 2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot x_1 \cdot y_1 - 2 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot x_1 \cdot y_1 + \cos^2(\alpha) \cdot y_1^2 + \sin^2(\alpha) \cdot y_1^2 \\
 &\quad \left. - 2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot x_2 \cdot y_2 - 2 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot x_2 \cdot y_2 + \cos^2(\alpha) \cdot y_2^2 + \sin^2(\alpha) \cdot y_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\cos^2(\alpha) \cdot x_1^2 + x_1^2 - \cos^2(\alpha) \cdot x_1^2 + \cos^2(\alpha) \cdot x_2^2 + x_2^2 - \cos^2(\alpha) \cdot x_2^2 \right. \\
 &\quad - 2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot x_1 \cdot y_1 - 2 \cdot x_1 \cdot y_1 + 2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot x_1 \cdot y_1 + \cos^2(\alpha) \cdot y_1^2 + y_1^2 \\
 &\quad - \cos^2(\alpha) \cdot y_1^2 - 2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot x_2 \cdot y_2 - 2 \cdot x_2 \cdot y_2 + \cos^2(\alpha) \cdot x_2 \cdot y_2 \\
 &\quad \left. + \cos^2(\alpha) \cdot y_2^2 + y_2^2 - \cos^2(\alpha) \cdot y_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot y_2 + y_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= d(x, y)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

■

(4) Toute symétrie axiale sur l'axe des ordonnées S_A dans \mathbb{R}^2 est une isométrie.

Démonstration

Nous avons

$$\begin{aligned}
 & d(S_A(x), S_A(y)) \\
 &= \sqrt{(-y_1 + x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\
 &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\
 &= d(x, y).
 \end{aligned}$$

■

Grâce à ces quatre propriétés, nous allons maintenant introduire un théorème nous permettant de construire toutes nos applications contractantes.

4.1.3 Théorème Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction définie de la manière suivante :

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T_{\vec{t}} \left(S_A \left(R_\alpha \left(H_k \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \right) \right) \right) = k \cdot \begin{pmatrix} (-1) \cdot (\cos(\alpha) \cdot x_1 - \sin(\alpha) \cdot x_2) \\ \sin(\alpha) \cdot x_1 + \cos(\alpha) \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

La fonction f est une application contractante si $k \in [0, 1[$. k est alors le facteur de contraction de f . L'application S_A étant optionnelle, nous allons démontrer le théorème dans les deux cas.

Démonstration

Nous devons montrer que $d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$ avec $s \in [0, 1[$. Démontrons d'abord le théorème sans l'application S_A . Partons du membre de gauche. Nous avons

$$\begin{aligned} & d(f(x), f(y)) \\ &= \left((k \cdot \cos(\alpha) \cdot y_1 - k \cdot \sin(\alpha) \cdot y_2 + t_1 - k \cdot \cos(\alpha) \cdot x_1 + k \cdot \sin(\alpha) \cdot x_2 - t_1)^2 \right. \\ & \quad \left. + (k \cdot \sin(\alpha) \cdot y_1 + k \cdot \cos(\alpha) \cdot y_2 + t_2 - k \cdot \sin(\alpha) \cdot x_1 - k \cdot \cos(\alpha) \cdot x_2 - t_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left((k \cdot \cos(\alpha) \cdot y_1 - k \cdot \sin(\alpha) \cdot y_2 - k \cdot \cos(\alpha) \cdot x_1 + k \cdot \sin(\alpha) \cdot x_2)^2 \right. \\ & \quad \left. + (k \cdot \sin(\alpha) \cdot y_1 + k \cdot \cos(\alpha) \cdot y_2 - k \cdot \sin(\alpha) \cdot x_1 - k \cdot \cos(\alpha) \cdot x_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= k \cdot d(R_\alpha(x), R_\alpha(y)) \\ &= k \cdot d(x, y). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Démontrons maintenant le théorème avec l'application S_A . Partons à nouveau du membre de gauche, nous avons

$$\begin{aligned}
 & d(f(x), f(y)) \\
 &= \left((-k \cdot \cos(\alpha) \cdot y_1 + k \cdot \sin(\alpha) \cdot y_2 + t_1 + k \cdot \cos(\alpha) \cdot x_1 - k \cdot \sin(\alpha) \cdot x_2 - t_1)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (k \cdot \sin(\alpha) \cdot y_1 + k \cdot \cos(\alpha) \cdot y_2 + t_2 - k \cdot \sin(\alpha) \cdot x_1 - k \cdot \cos(\alpha) \cdot x_2 - t_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left((k \cdot \cos(\alpha) \cdot y_1 - k \cdot \sin(\alpha) \cdot y_2 - t_1 - k \cdot \cos(\alpha) \cdot x_1 + k \cdot \sin(\alpha) \cdot x_2 + t_1)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (k \cdot \sin(\alpha) \cdot y_1 + k \cdot \cos(\alpha) \cdot y_2 + t_2 - k \cdot \sin(\alpha) \cdot x_1 - k \cdot \cos(\alpha) \cdot x_2 - t_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left((k \cdot \cos(\alpha) \cdot y_1 - k \cdot \sin(\alpha) \cdot y_2 - k \cdot \cos(\alpha) \cdot x_1 + k \cdot \sin(\alpha) \cdot x_2)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (k \cdot \sin(\alpha) \cdot y_1 + k \cdot \cos(\alpha) \cdot y_2 - k \cdot \sin(\alpha) \cdot x_1 - k \cdot \cos(\alpha) \cdot x_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= k \cdot d(R_\alpha(x), R_\alpha(y)) \\
 &= k \cdot d(x, y).
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Par conséquent, dans les deux cas, la fonction f est une application contractante si $k \in [0, 1[$. ■

Le théorème affirme que la composition d'une translation, éventuellement d'une symétrie axiale, d'une rotation et d'une homothétie de rapport $k \in [0, 1[$ est une application contractante de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 avec k comme facteur de contraction. Puis, par le théorème 3.2.6, cela implique également que c'est une application contractante de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$.

4.2 Application du théorème 3.2.6

Maintenant que nous avons nos applications contractantes, il nous reste encore à avoir des compacts sur lesquels appliquer nos fonctions. Autrement dit, il nous faut des ensembles qui soient fermés et totalement bornés. Dans \mathbb{R}^2 , il s'agit tout simplement de figures finies qui incluent leur périmètre. Un carré, un triangle, un segment, un hexagone ou encore un cercle en sont quelques exemples.

A partir de maintenant, nous pouvons appliquer le théorème 3.2.6 car toutes ses conditions sont remplies. En effet, nous avons :

- (a) un espace métrique complet, $(\mathbb{R}^2, \text{euclidienne})$,
- (b) un IFS constitué d'un nombre fini d'applications contractantes de la forme du théorème 4.1.3,
- (c) des compacts sur lesquels itérer notre IFS.

Nous obtiendrons ainsi notre point fixe, notre fractale.

4.3 Quelques fractales

Nous allons maintenant illustrer quelques fractales obtenues à partir de notre programme. Pour chaque fractale, nous poserons d'abord les applications contractantes constituant l'IFS. Puis, nous illustrerons les résultats obtenus après 1, 2, 3 et n itérations.

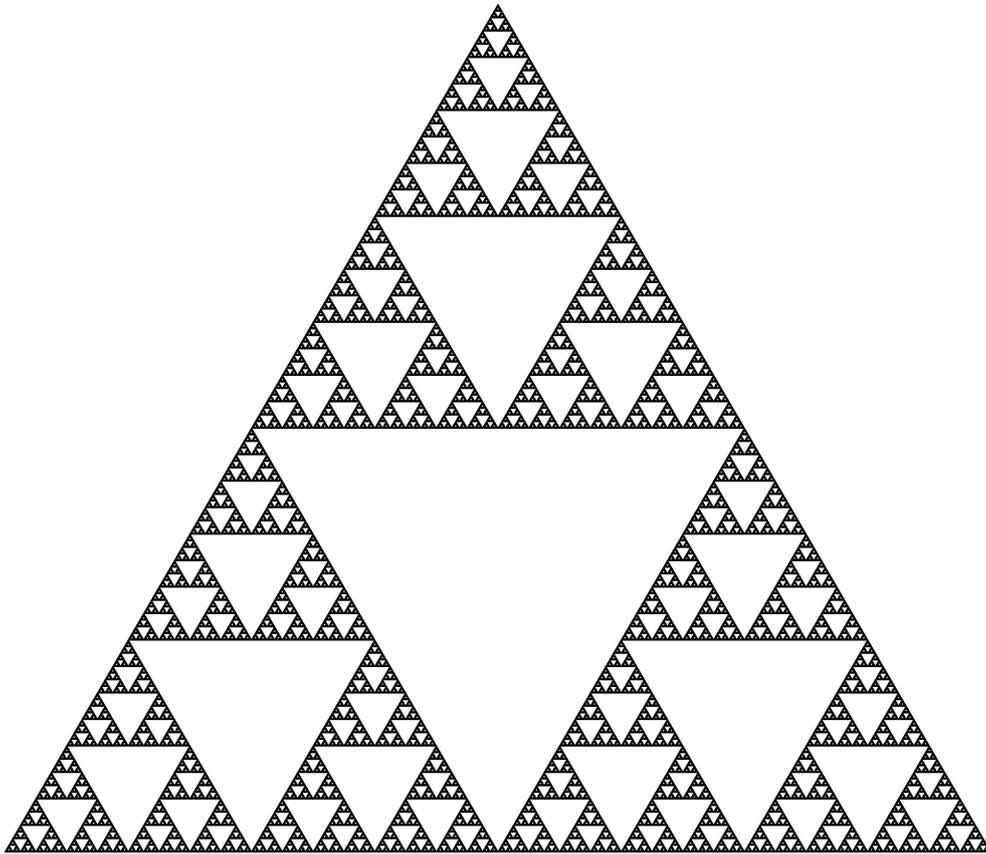
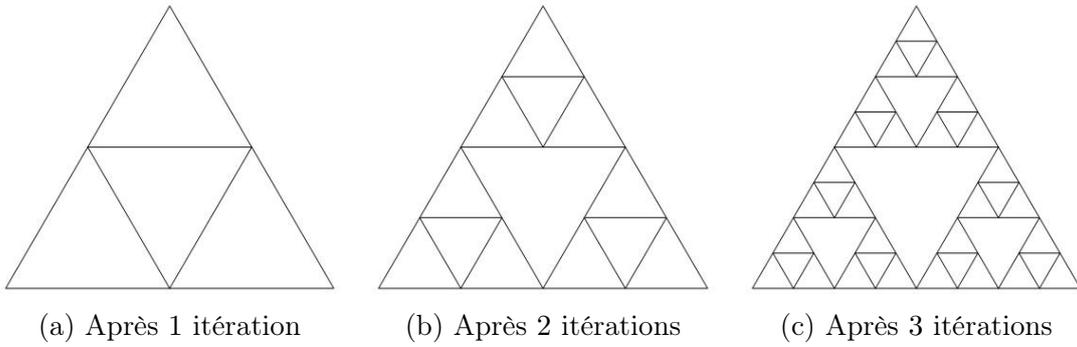
4.3.1 Triangle de Sierpinski

Nous considérons l'IFS constitué des applications contractantes suivantes :

- (a) $sf1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{pmatrix}$ où $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = 0$, $k = \frac{1}{2}$.
- (b) $sf2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{pmatrix}$ où $\vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = 0$, $k = \frac{1}{2}$.
- (c) $sf3(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$ où $\vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$, $\alpha = 0$, $k = \frac{1}{2}$.

Nous itérons cet IFS sur un triangle équilatéral (voir figure 4.1). L'AFC obtenu est appelé Triangle de Sierpinski.

Nous pouvons rappeler maintenant la définition du mot fractale que nous avons proposée : chacune de ses parties possède une structure approximativement similaire au tout. Nous pouvons en effet l'observer sur le Triangle de Sierpinski : à plusieurs échelles, nous distinguons un triangle équilatéral dépourvu de son centre, un autre triangle similaire. Théoriquement, si nous atteignons notre point fixe, nous pourrions l'observer à une échelle infiniment petite. Cette répétition infinie quelle que soit l'échelle est en fait une conséquence du point fixe. En effet, cette infinité est nécessaire pour remplir la condition du point fixe : $W(A) = A$. Cependant, nous ne pourrions jamais atteindre cet AFC car l'infini est un concept mathématique physiquement inatteignable.



(d) Après 10 itérations

FIGURE 4.1 – Triangle de Sierpinski

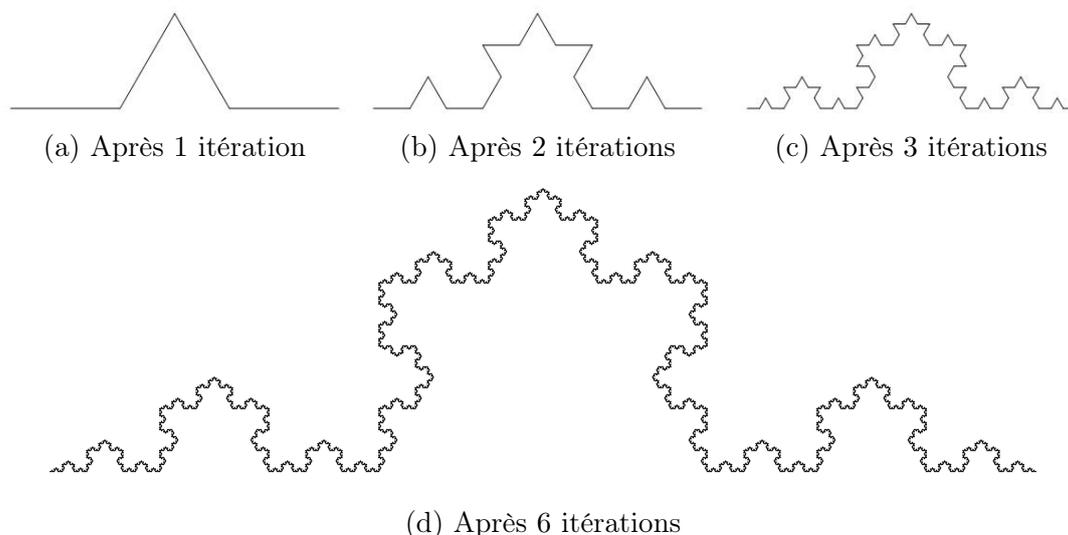


FIGURE 4.2 – Courbe de Koch

4.3.2 Courbe de Koch

Nous considérons l'IFS constitué des applications contractantes suivantes :

$$(a) \quad kf1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{3}.$$

$$(b) \quad kf2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot x_1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot x_1 + \frac{1}{6} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad k = \frac{1}{3}.$$

$$(c) \quad kf3(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot x_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot x_1 + \frac{1}{6} \cdot x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{-\pi}{3}, \quad k = \frac{1}{3}.$$

$$(d) \quad kf4(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{3}.$$

Nous itérons cet IFS sur un segment (voir figure 4.2) ainsi que sur un triangle (voir figure 4.3). Ceci nous permet ainsi d'illustrer l'unicité du point fixe. En effet, quel que soit le compact sur lequel nous itérons l'IFS, l'AFC obtenu sera le même. Cette fractale est appelée Courbe de Koch.

4.3.3 Arbres

Nous considérons les applications contractantes suivantes :

$$(a) \quad tf1(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = 1.$$

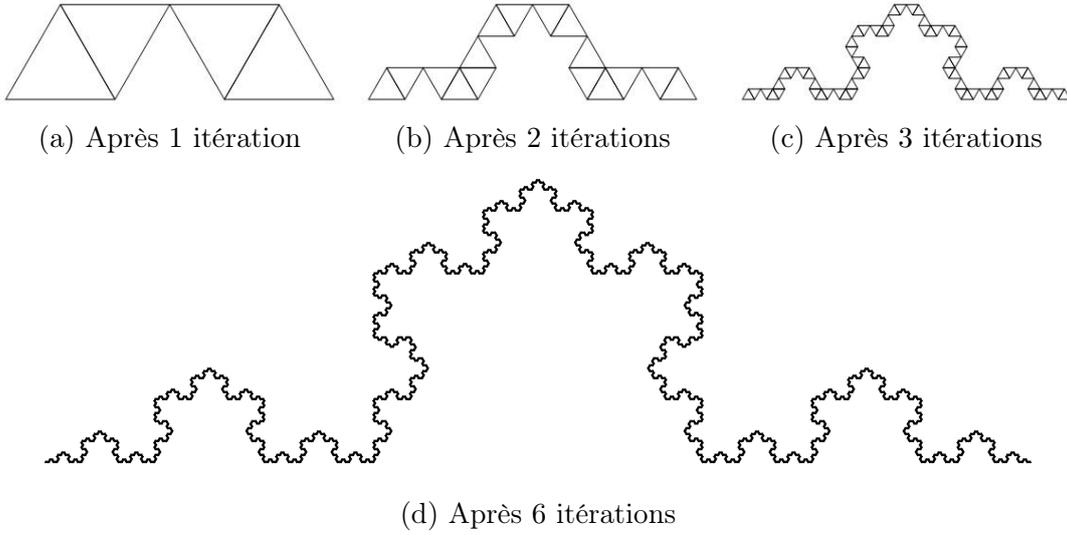


FIGURE 4.3 – Courbe de Koch

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } tf2(x) &= \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \cos(40^\circ)}{5} \cdot x_1 - \frac{2 \cdot \sin(40^\circ)}{5} \cdot x_2 \\ \frac{2 \cdot \sin(40^\circ)}{5} \cdot x_1 + \frac{2 \cdot \cos(40^\circ)}{5} \cdot x_2 + \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{40 \cdot \pi}{180}, k = \frac{2}{5}. \\
 \text{(c) } tf3(x) &= \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \cos(-40^\circ)}{5} \cdot x_1 - \frac{2 \cdot \sin(-40^\circ)}{5} \cdot x_2 \\ \frac{2 \cdot \sin(-40^\circ)}{5} \cdot x_1 + \frac{2 \cdot \cos(-40^\circ)}{5} \cdot x_2 + \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{-40 \cdot \pi}{180}, k = \frac{2}{5}. \\
 \text{(d) } tf4(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(50^\circ)}{3} \cdot x_1 - \frac{\sin(50^\circ)}{3} \cdot x_2 \\ \frac{\sin(50^\circ)}{3} \cdot x_1 + \frac{\cos(50^\circ)}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{50 \cdot \pi}{180}, k = \frac{1}{3}. \\
 \text{(e) } tf5(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(-50^\circ)}{3} \cdot x_1 - \frac{\sin(-50^\circ)}{3} \cdot x_2 \\ \frac{\sin(-50^\circ)}{3} \cdot x_1 + \frac{\cos(-50^\circ)}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{-50 \cdot \pi}{180}, k = \frac{1}{3}. \\
 \text{(f) } tf6(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 + 1 \end{pmatrix} \\
 \text{(g) } tf7(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot x_2 \\ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + 1 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = \frac{-\pi}{6}, k = \frac{1}{\sqrt{3}}. \\
 \text{(h) } tf8(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot x_2 \\ \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + 1 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = \frac{-\pi}{6}, k = \frac{1}{\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

Nous itérons l'IFS constitué des applications $tf1, tf7$ et $tf8$ sur un segment vertical (voir figure 4.4).

Nous itérons l'IFS constitué des applications $tf1, tf2, tf3, tf4, tf5$ et $tf6$ sur un segment vertical (voir figure 4.5).

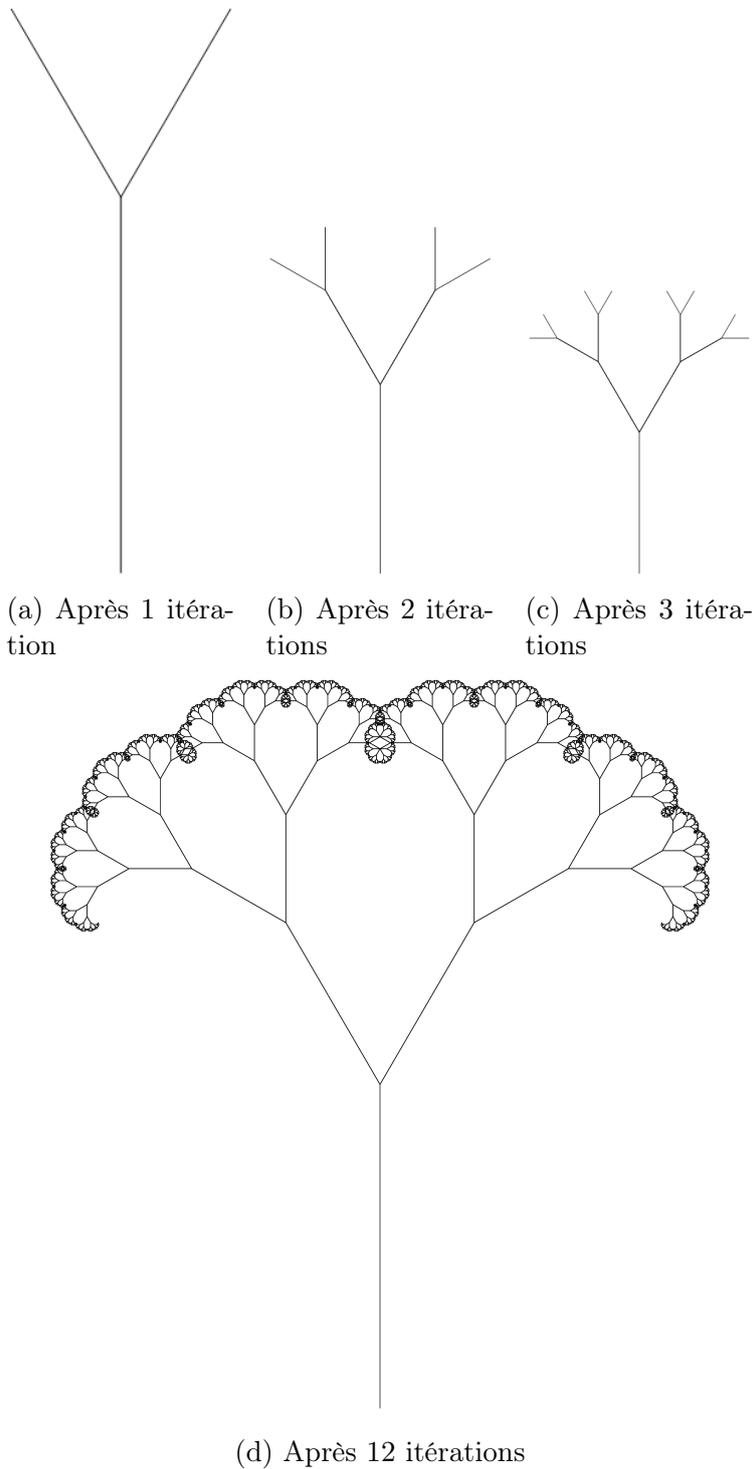
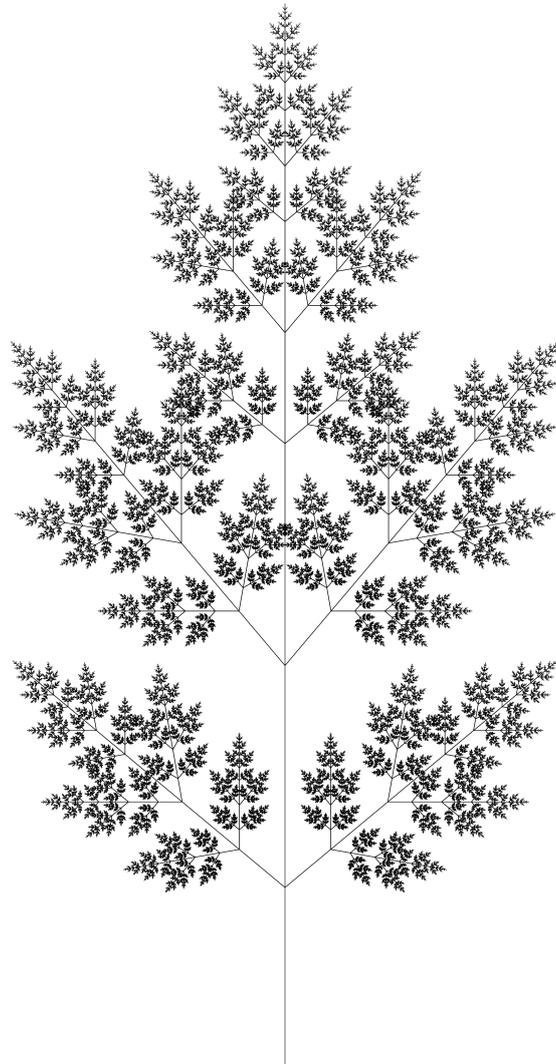
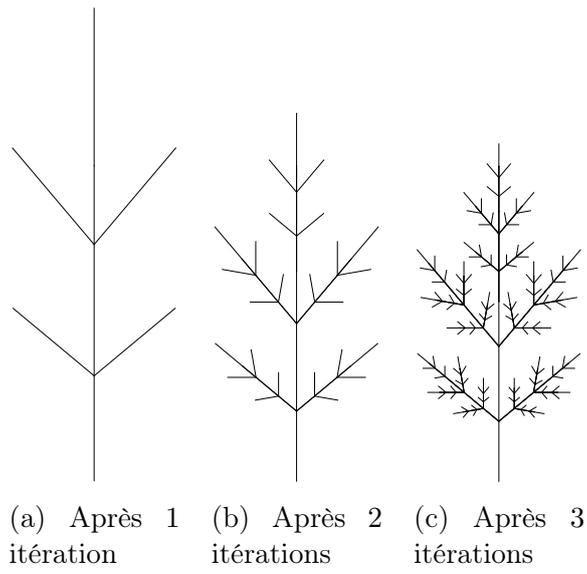


FIGURE 4.4 – Arbre simple



(d) Après 7 itérations

FIGURE 4.5 – Arbre

4.3.4 Flocons

Pour le premier flocon, nous considérons l'IFS constitué des applications contractantes suivantes :

$$(a) \text{ snf1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{3}.$$

$$(b) \text{ snf2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{3}.$$

$$(c) \text{ snf3}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{3}.$$

$$(d) \text{ snf4}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{3}.$$

$$(e) \text{ snf5}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 + 1 \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{3}.$$

$$(f) \text{ snf6}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{3}.$$

$$(g) \text{ snf7}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{3}.$$

Nous itérons cet IFS sur un hexagone (voir figure 4.6).

Pour le deuxième flocon, nous considérons l'IFS constitué des applications contractantes suivantes :

$$(a) \text{ sn2f1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot x_1 \\ \frac{1}{4} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{4}.$$

$$(b) \text{ sn2f2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot x_1 + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{4}.$$

$$(c) \text{ sn2f3}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot x_1 - \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \cdot x_2 + \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{4}.$$

$$(d) \text{ sn2f4}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{4}.$$

$$(e) \text{ sn2f5}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot x_1 + \frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} \cdot x_2 + \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{4}.$$

$$(f) \text{ sn2f6}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot x_1 \\ \frac{1}{4} \cdot x_2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{4}.$$

$$(g) \text{ sn2f7}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot x_1 + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \cdot x_2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \alpha = 0, k = \frac{1}{4}.$$

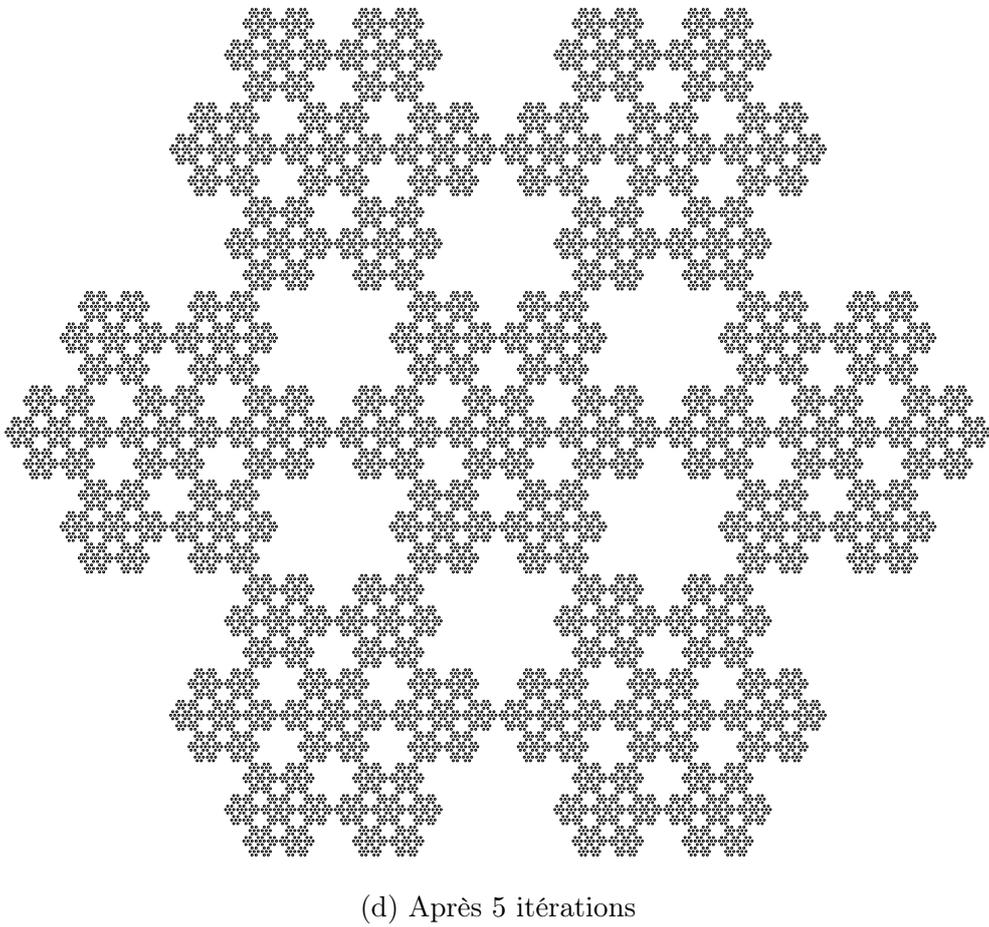
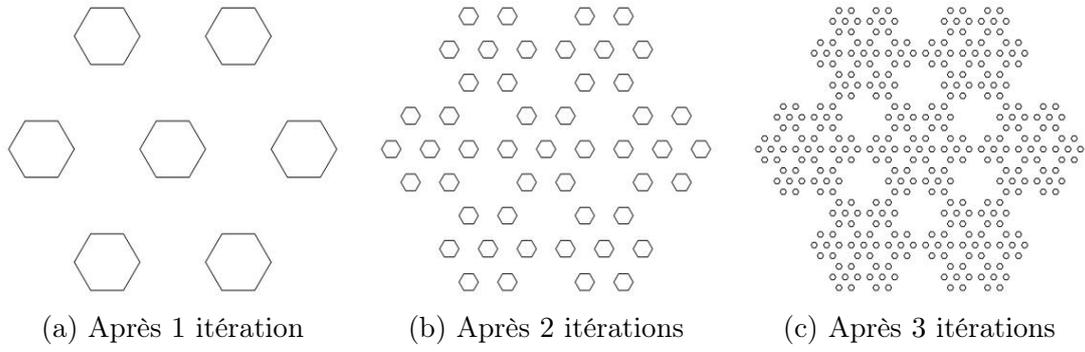


FIGURE 4.6 – Premier flocon

Nous itérons cet IFS sur un carré (voir figure 4.7).

4.3.5 Feuilles

Pour la première feuille, nous considérons l'IFS constitué des applications contractantes suivantes :

$$(a) \text{ feu1f1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{3\pi}{4}, k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(b) \text{ feu1f2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{3\pi}{4}, k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nous itérons cet IFS sur un carré (voir figure 4.8).

La deuxième feuille est peut-être une nouvelle fractale : nous l'avons trouvée et il ne nous semble pas l'avoir rencontrée ailleurs. Nous la nommons la feuille Dujardin. Nous considérons l'IFS constitué des applications contractantes suivantes :

$$(a) \text{ feu2f1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 \\ \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = \frac{\pi}{4}, k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(b) \text{ feu2f2}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{\pi}{4}, k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'application contractante *feu2f2* contient également une symétrie axiale S_A . Nous itérons cet IFS sur un triangle (voir figure 4.9).

4.3.6 Courbes

Pour la première courbe, nous considérons l'IFS constitué des applications contractantes suivantes :

$$(a) \text{ c1f1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 \\ \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = \frac{\pi}{4}, k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(b) \text{ c1f2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{-\pi}{4}, k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nous itérons cet IFS sur un segment (voir figure 4.10).

Pour la deuxième courbe, communément appelée la courbe du dragon, Nous considérons l'IFS constitué des applications contractantes suivantes :

$$(a) \text{ c2f1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 \\ \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = \frac{\pi}{4}, k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

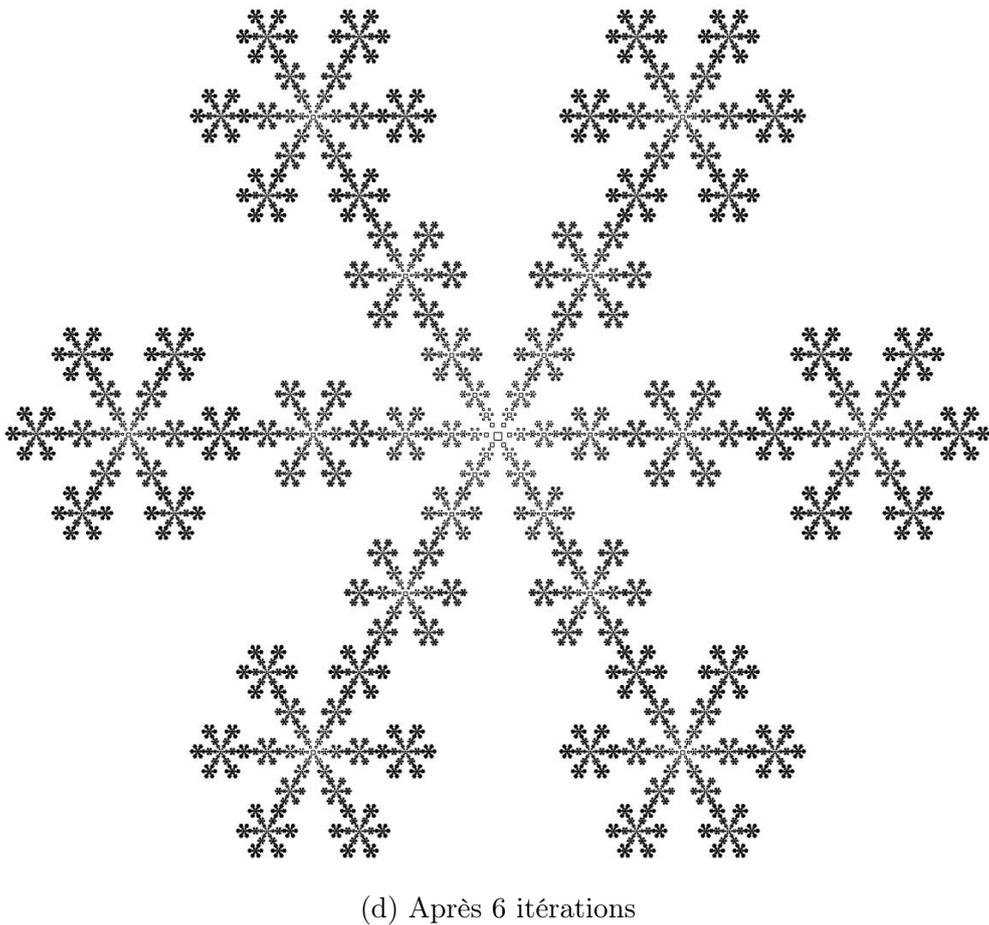
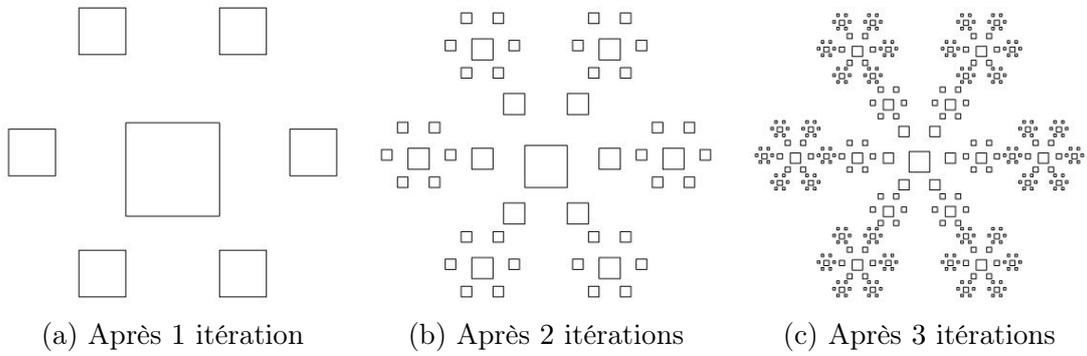


FIGURE 4.7 – Deuxième flocon

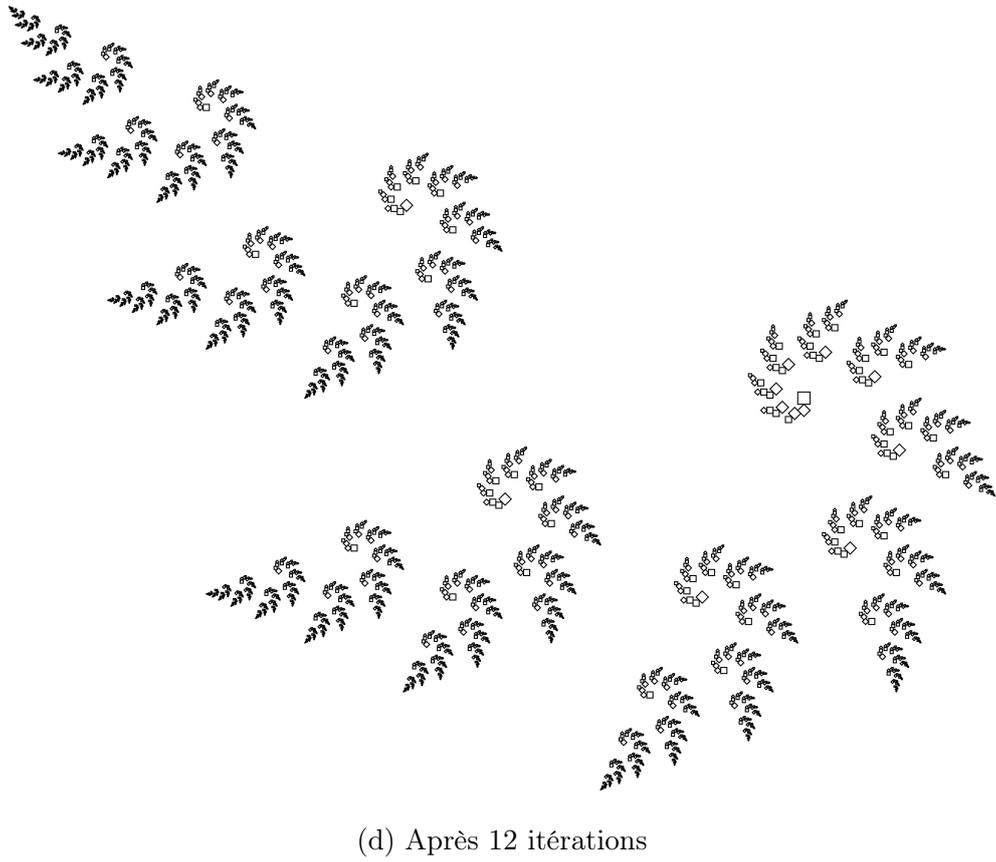
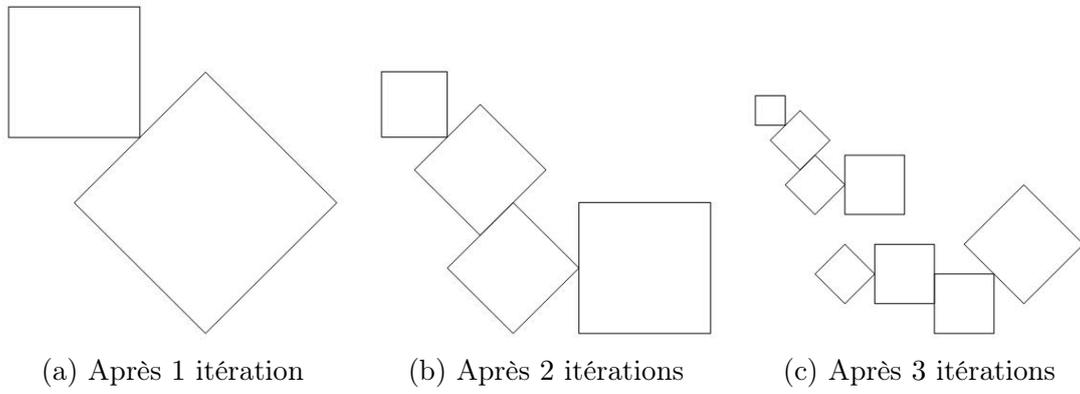
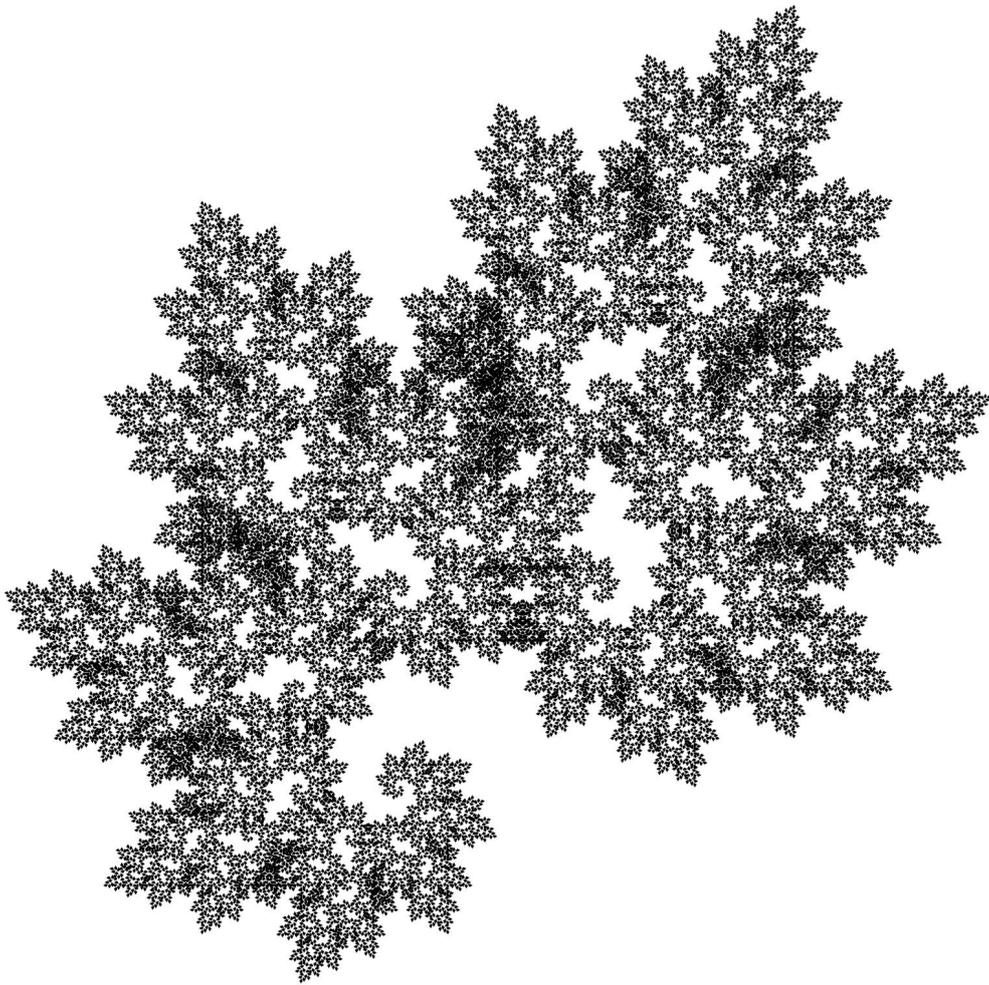
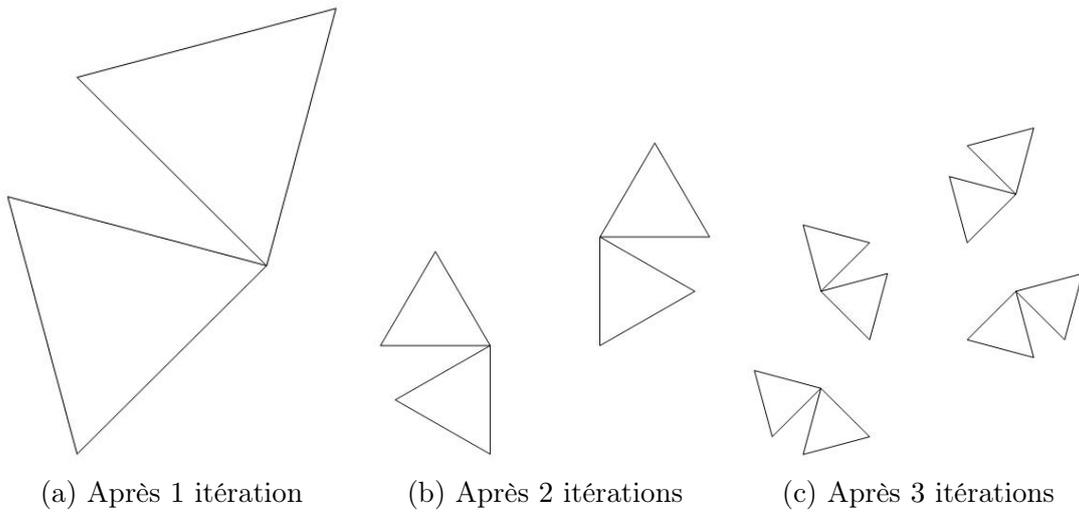


FIGURE 4.8 – Feuille



(d) Après 15 itérations
FIGURE 4.9 – Feuille Dujardin

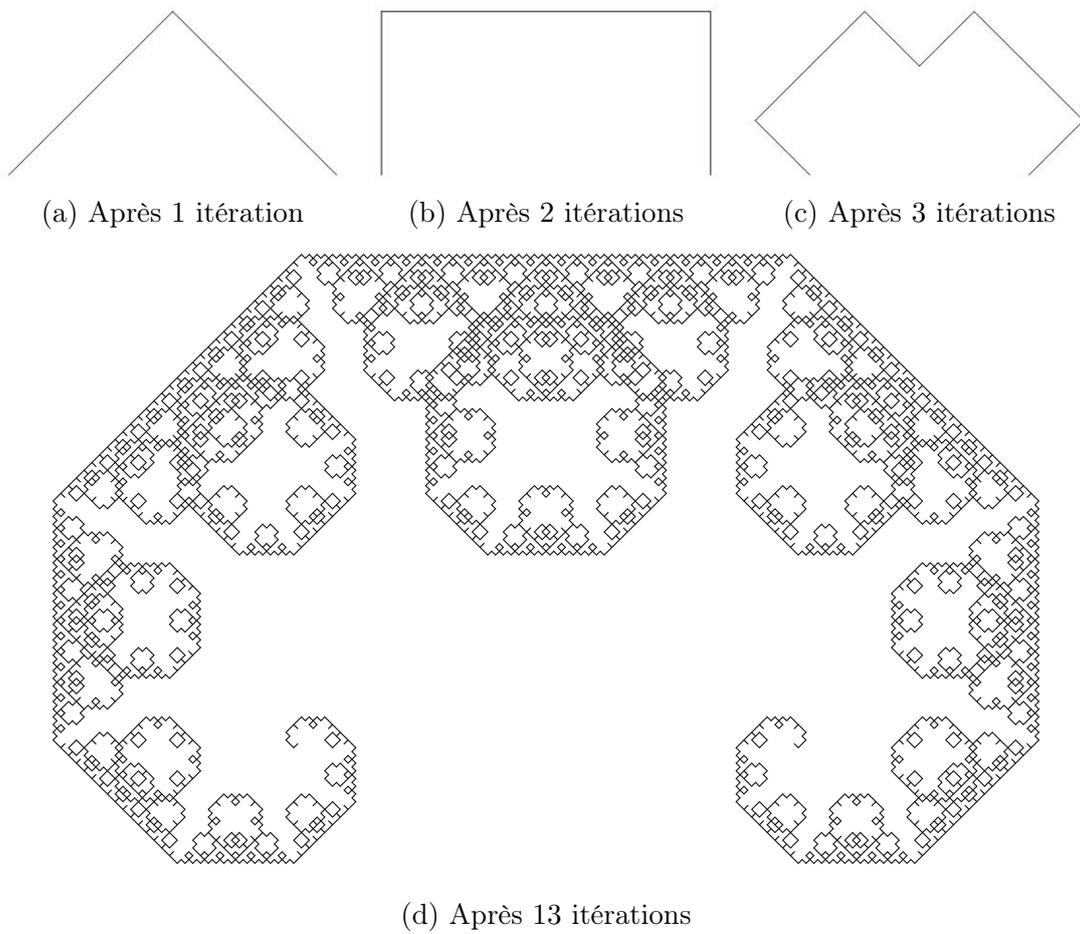


FIGURE 4.10 – Courbe 1

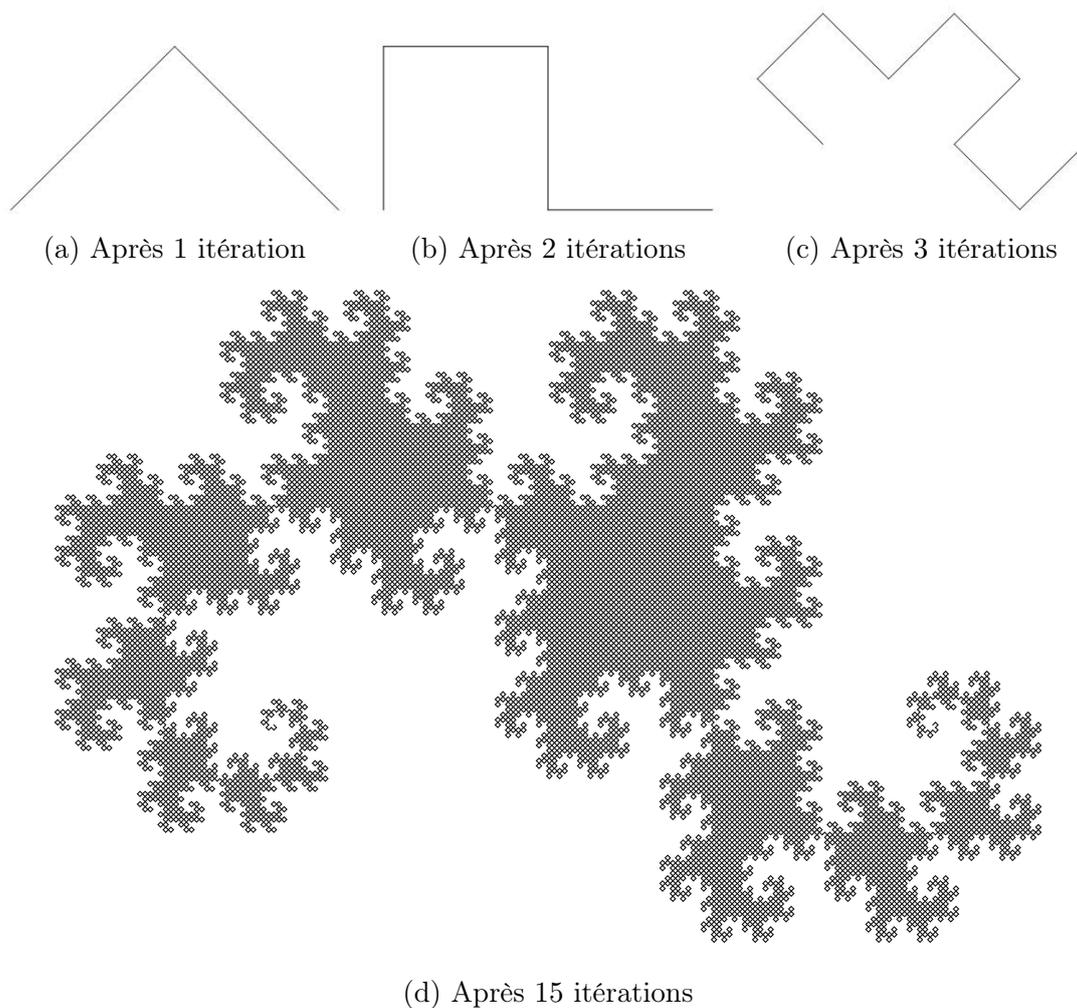


FIGURE 4.11 – Courbe 2

$$(b) \quad c2f2(x) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 + 1 \\ \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}, \quad k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nous itérons cet IFS sur un segment (voir figure 4.11).

Pour la troisième courbe, nous considérons l'IFS constitué des applications contractantes suivantes :

$$(a) \quad c3f1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_2 \\ \frac{1}{2} \cdot x_1 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

$$(b) \quad c3f2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{2}.$$

$$(c) \quad c3f3(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{2}.$$

$$(d) \quad c3f4(x) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \cdot x_2 + 1 \\ \frac{-1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{-\pi}{2}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

L'application contractante $c3f4$ possède également une symétrie axiale S_A .

Nous itérons cet IFS sur un segment (voir figure 4.12).

4.3.7 Tapis de Sierpinski

Nous considérons l'IFS constitué des applications contractantes suivantes :

$$(a) \quad tsf1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{3}.$$

$$(b) \quad tsf2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{3}.$$

$$(c) \quad tsf3(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{3}.$$

$$(d) \quad tsf4(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{3}.$$

$$(e) \quad tsf5(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{3}.$$

$$(f) \quad tsf6(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{3}.$$

$$(g) \quad tsf7(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{3}.$$

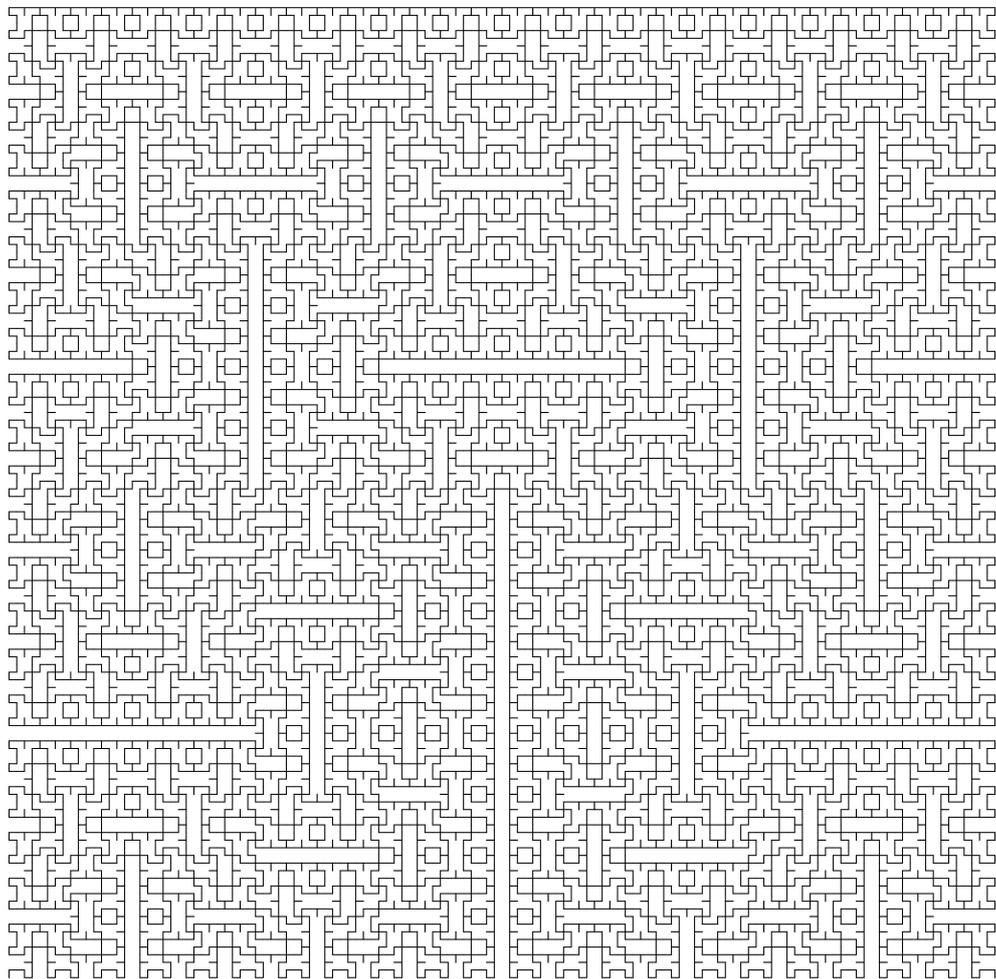
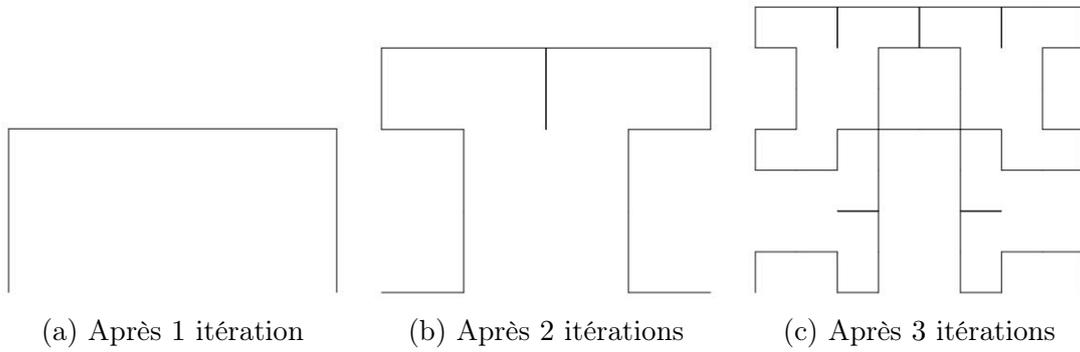
$$(h) \quad tsf8(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ où } \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad k = \frac{1}{3}.$$

Nous itérons cet IFS sur un carré (voir figure 4.13). L'AFC obtenu est appelé Tapis de Sierpinski.

Les applications des sections 4.3.5, 4.3.6 et 4.3.7 ne faisaient pas partie du code Mathematica initial. Nous les avons ajoutées. Nous avons aussi modifié les fonctions arbres.

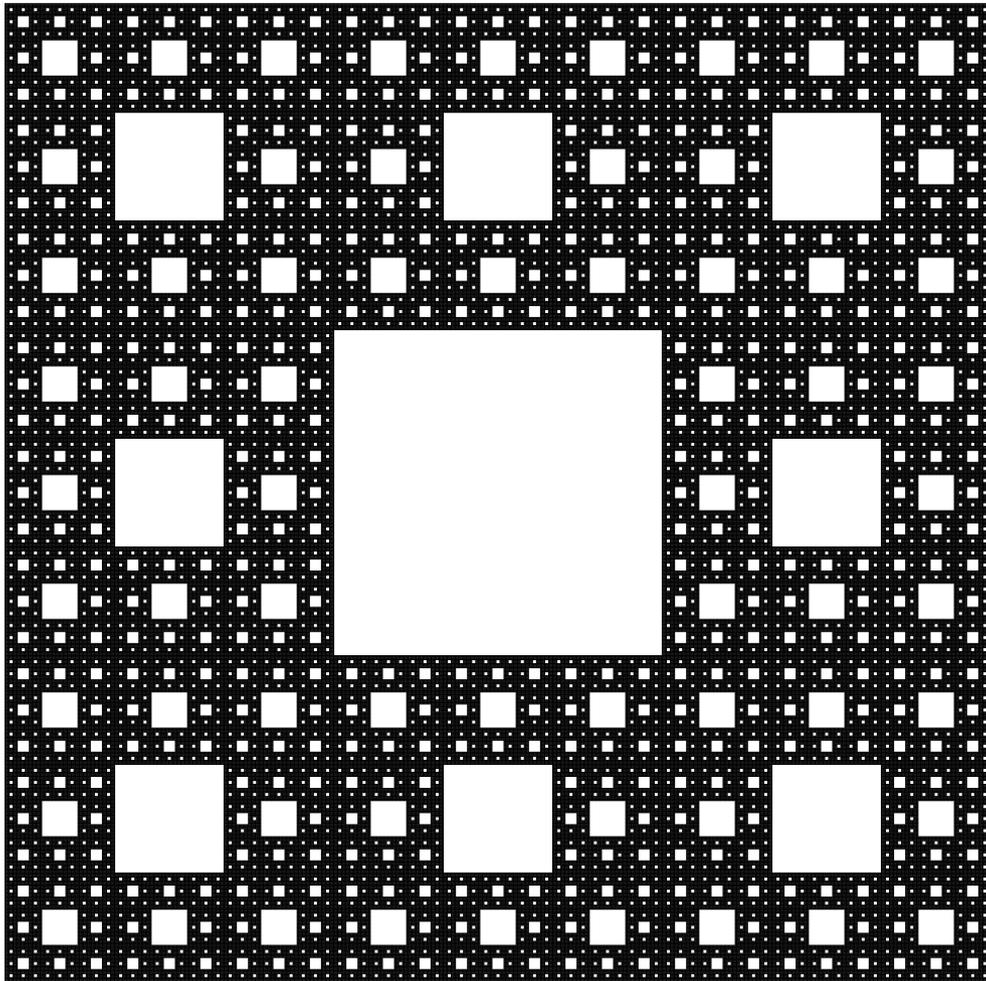
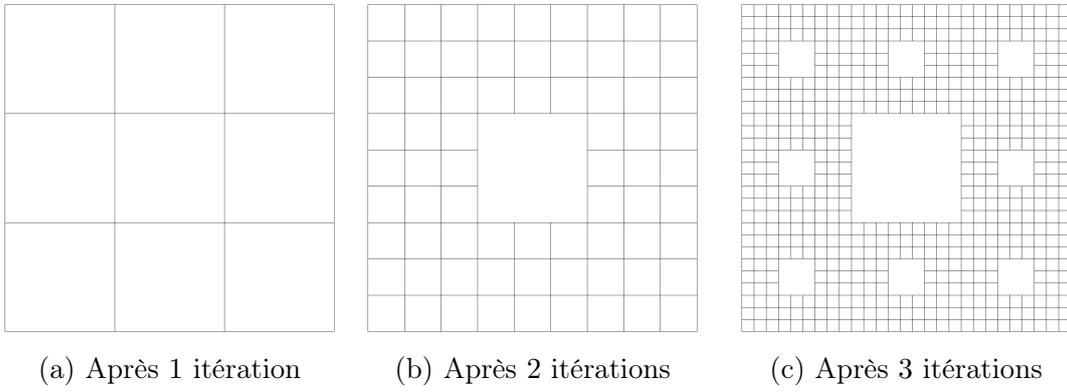
4.4 Code

Le code Mathematica utilisé pour créer nos fractales est mis juste ci-dessous. Pour voir le code originel, vous pouvez consulter le site [1].



(d) Après 7 itérations

FIGURE 4.12 – Courbe 3



(d) Après 6 itérations

FIGURE 4.13 – Tapis de Sierpinski

Formes basiques

Il y a ici quelques formes basiques lesquelles pourront être transformées pour créer des fractales.

$$\text{point} = \{\{0, 0\}, \{0, 0\}\};$$

$$\text{segment} = \{\{0, 0\}, \{1, 0\}\};$$

$$\text{vertical} = \{\{0, 0\}, \{0, 1\}\};$$

$$\text{triangle} = \{\{0, 0\}, \{1, 0\}, \{0.5, N[\text{Sqrt}[3]/2]\}, \{0, 0\}\};$$

$$\text{square} = \{\{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 1\}, \{1, 0\}, \{0, 0\}\};$$

$$\text{diamond} = \{\{0.5, 0\}, \{0, 0.5\}, \{-0.5, 0\}, \{0, -0.5\}, \{0.5, 0\}\};$$

$$\text{hexagon} = \{\{0, 0\}, \{0.5, 0\}, \{3/4, \text{Sqrt}[3]/4\}, \{0.5, \text{Sqrt}[3]/2\}, \{0, \text{Sqrt}[3]/2\}, \\ \{-1/4, \text{Sqrt}[3]/4\}, \{0, 0\}\};$$

Il y a ici des codes pour diverses IFS.

Triangle de Sierpinski

$$\text{sf1}[x_] := \left\{ \frac{1}{2}x[[1]], \frac{1}{2}x[[2]] \right\} // N;$$

$$\text{sf2}[x_] := \left\{ \frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x[[2]] \right\} // N;$$

$$\text{sf3}[x_] := \left\{ \frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}x[[2]] + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\} // N;$$

$$\text{sierpinski} = \{\text{sf1}, \text{sf2}, \text{sf3}\};$$

Courbe de Koch

$$\text{kf1}[x_] := \left\{ \frac{1}{3}x[[1]], \frac{1}{3}x[[2]] \right\} // N;$$

$$\text{kf4}[x_] := \left\{ \frac{1}{3}x[[1]] + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}x[[2]] \right\} // N;$$

$$\text{kf2}[x_] := \left\{ \frac{1}{6}x[[1]] - \frac{\sqrt{3}}{6}x[[2]] + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x[[1]] + \frac{1}{6}x[[2]] \right\} // N;$$

$$\text{kf3}[x_] := \left\{ \frac{1}{6}x[[1]] + \frac{\sqrt{3}}{6}x[[2]] + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}x[[1]] + \frac{1}{6}x[[2]] + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\} // N;$$

$$\text{koch} = \{\text{kf1}, \text{kf2}, \text{kf3}, \text{kf4}\};$$

Arbres

$$\text{tf1}[x_] := \{x[[1]], x[[2]]\} // N;$$

$$\text{tf2}[x_] := \left\{ \frac{2\text{Cos}[40\text{Degree}]}{5}x[[1]] - \frac{2\text{Sin}[40\text{Degree}]}{5}x[[2]], \frac{2\text{Sin}[40\text{Degree}]}{5}x[[1]] + \frac{2\text{Cos}[40\text{Degree}]}{5}x[[2]] \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \right\} // N;$$

$$\text{tf3}[x_] := \left\{ \frac{2\text{Cos}[-40\text{Degree}]}{5}x[[1]] - \frac{2\text{Sin}[-40\text{Degree}]}{5}x[[2]], \frac{2\text{Sin}[-40\text{Degree}]}{5}x[[1]] + \frac{2\text{Cos}[-40\text{Degree}]}{5}x[[2]] \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \right\} // N;$$

$$\text{tf4}[x_] := \left\{ \frac{\text{Cos}[50\text{Degree}]}{3}x[[1]] - \frac{\text{Sin}[50\text{Degree}]}{3}x[[2]], \frac{\text{Sin}[50\text{Degree}]}{3}x[[1]] + \frac{\text{Cos}[50\text{Degree}]}{3}x[[2]] + \frac{1}{3} \right\} \\ // N;$$

$$\text{tf5}[x_] := \left\{ \frac{\text{Cos}[-50\text{Degree}]}{3}x[[1]] - \frac{\text{Sin}[-50\text{Degree}]}{3}x[[2]], \frac{\text{Sin}[-50\text{Degree}]}{3}x[[1]] + \frac{\text{Cos}[-50\text{Degree}]}{3}x[[2]] \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \right\} // N;$$

$$\text{tf6}[x_] := \left\{ \frac{1}{2}x[[1]], \frac{1}{2}x[[2]] + 1 \right\} // N;$$

$$\text{tf7}[x_] := \left\{ \frac{1}{2}x[[1]] - \frac{1}{2\sqrt{3}}x[[2]], \frac{1}{2\sqrt{3}}x[[1]] + \frac{1}{2}x[[2]] + 1 \right\} // N;$$

$$\text{tf8}[x_] := \left\{ \frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{2\sqrt{3}}x[[2]], -\frac{1}{2\sqrt{3}}x[[1]] + \frac{1}{2}x[[2]] + 1 \right\} // N;$$

$$\text{simpletree} = \{\text{tf1}, \text{tf7}, \text{tf8}\};$$

$$\text{tree} = \{\text{tf1}, \text{tf2}, \text{tf3}, \text{tf4}, \text{tf5}, \text{tf6}\};$$

Flocons

$$\text{snf1}[x_] := \left\{ \frac{1}{3}x[[1]], \frac{1}{3}x[[2]] \right\} // N;$$

$$\text{snf2}[x_] := \left\{ \frac{1}{3}x[[1]] + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}x[[2]] \right\} // N;$$

$$\text{snf3}[x_] := \left\{ \frac{1}{3}x[[1]] - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}x[[2]] + \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} // N;$$

$$\text{snf4}[x_] := \left\{ \frac{1}{3}x[[1]] + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}x[[2]] + \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} // N;$$

$$\text{snf5}[x_] := \left\{ \frac{1}{3}x[[1]] + 1, \frac{1}{3}x[[2]] + \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} // N;$$

$$\text{snf6}[x_] := \left\{ \frac{1}{3}x[[1]], \frac{1}{3}x[[2]] + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\} // N;$$

$$\text{snf7}[x_] := \left\{ \frac{1}{3}x[[1]] + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}x[[2]] + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\} // N;$$

$$\text{snowflake} = \{\text{snf1}, \text{snf2}, \text{snf3}, \text{snf4}, \text{snf5}, \text{snf6}, \text{snf7}\};$$

$$\begin{aligned} \text{sn2f1}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{4}x[[1]], \frac{1}{4}x[[2]] \right\} // N; \\ \text{sn2f2}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{4}x[[1]] + \frac{3}{4}, \frac{1}{4}x[[2]] \right\} // N; \\ \text{sn2f3}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{4}x[[1]] - \frac{3}{8}, \frac{1}{4}x[[2]] + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right\} // N; \\ \text{sn2f4}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}x[[2]] + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\} // N; \\ \text{sn2f5}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{4}x[[1]] + \frac{9}{8}, \frac{1}{4}x[[2]] + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right\} // N; \\ \text{sn2f6}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{4}x[[1]], \frac{1}{4}x[[2]] + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right\} // N; \\ \text{sn2f7}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{4}x[[1]] + \frac{3}{4}, \frac{1}{4}x[[2]] + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right\} // N; \end{aligned}$$

Feuilles

$$\begin{aligned} \text{feu1f1}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{2}x[[1]], \frac{1}{2}x[[2]] + \frac{1}{2} \right\} // N; \\ \text{feu1f2}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{2}x[[1]] - \frac{1}{2}x[[2]] + \frac{3}{4}, \frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{2}x[[2]] - \frac{1}{4} \right\} // N; \\ \text{feuille1} &= \{\text{feu1f1}, \text{feu1f2}\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{feu2f1}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{2}x[[1]] - \frac{1}{2}x[[2]], \frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{2}x[[2]] \right\} // N; \\ \text{feu2f2}[x_] &:= \left\{ -\frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{2}x[[2]] + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{2}x[[2]] + \frac{1}{2} \right\} // N; \end{aligned}$$

Courbes

$$\begin{aligned} \text{c1f1}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{2}x[[1]] - \frac{1}{2}x[[2]], \frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{2}x[[2]] \right\} // N; \\ \text{c1f2}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{2}x[[2]] + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{2}x[[2]] + \frac{1}{2} \right\} // N; \\ \text{courbe1} &= \{\text{c1f1}, \text{c1f2}\}; \\ \text{c2f1}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{2}x[[1]] - \frac{1}{2}x[[2]], \frac{1}{2}x[[1]] + \frac{1}{2}x[[2]] \right\} // N; \\ \text{c2f2}[x_] &:= \left\{ -\frac{1}{2}x[[1]] - \frac{1}{2}x[[2]] + 1, \frac{1}{2}x[[1]] - \frac{1}{2}x[[2]] \right\} // N; \\ \text{courbe2} &= \{\text{c2f1}, \text{c2f2}\}; \\ \text{c3f1}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{2}x[[2]], \frac{1}{2}x[[1]] \right\} // N; \\ \text{c3f2}[x_] &:= \left\{ \frac{1}{2}x[[1]], \frac{1}{2}x[[2]] + \frac{1}{2} \right\} // N; \end{aligned}$$

```

c3f3[x_] := {1/2 x[[1]] + 1/2, 1/2 x[[2]] + 1/2} // N;
c3f4[x_] := {-1/2 x[[2]] + 1, -1/2 x[[1]] + 1/2} // N;
courbe3 = {c3f1, c3f2, c3f3, c3f4};

```

Tapis de Sierpinski

```

tsf1[x_] := {1/3 x[[1]], 1/3 x[[2]]} // N;
tsf2[x_] := {1/3 x[[1]] + 1/3, 1/3 x[[2]]} // N;
tsf3[x_] := {1/3 x[[1]] + 2/3, 1/3 x[[2]]} // N;
tsf4[x_] := {1/3 x[[1]], 1/3 x[[2]] + 1/3} // N;
tsf5[x_] := {1/3 x[[1]] + 2/3, 1/3 x[[2]] + 1/3} // N;
tsf6[x_] := {1/3 x[[1]], 1/3 x[[2]] + 2/3} // N;
tsf7[x_] := {1/3 x[[1]] + 1/3, 1/3 x[[2]] + 2/3} // N;
tsf8[x_] := {1/3 x[[1]] + 2/3, 1/3 x[[2]] + 2/3} // N;
tapis = {tsf1, tsf2, tsf3, tsf4, tsf5, tsf6, tsf7, tsf8};

```

Ce code sert à itérer l'IFS et donner une image du résultat.

```

MapShape[f_, s_] := Map[f, s];
(*s est une liste de points*)
MapShapeList[f_, l_] := Map[MapShape[f, #]&, l];
(*l est une liste de listes de points*)
IfsShapeList[ifs_, l_] := Flatten[Map[MapShapeList[#, l]&, ifs], 1];
(*ifs est une liste d'applications*)
IterateIfs[ifs_, shape_, n_] := Nest[IfsShapeList[ifs, #]&, {shape}, n];
PlotIfs[ifs_, shape_, n_] := Module[{l, glist}, l = IterateIfs[ifs, shape, n];
glist = Map[Line, l];
Show[Graphics[{Thickness[.001]} ~ Join ~ glist], AspectRatio -> Automatic]]

```

(* La fonction Join sert à fusionner plusieurs listes *)

Conclusion

Nous arrivons d'ores et déjà au terme de notre travail et il reste pourtant tant à dire. Nous vous avons donné une idée de ce que pouvait être une fractale à travers les IFS. Remarquez qu'il est réellement nécessaire d'avoir un travail rigoureux et de longue haleine avant de passer à l'application concrète. Nous nous devons d'être méthodiques, précis et fidèles aux définitions ; sans quoi, il est impossible d'avancer. Il est également important de voir que nous avons illustré qu'une partie des IFS en nous concentrant sur \mathbb{R}^2 avec la métrique euclidienne et que notre attracteur de famille de contraction peut prendre encore bien d'autres aspects. Par exemple, il serait intéressant d'adapter nos applications contractantes sur \mathbb{R}^3 ou encore de les itérer sur d'autres objets, comme par exemple des photos. De plus, notez que les AFC de nos systèmes de fonctions itérées ne représentent qu'une petite partie de ce que peut être une fractale. En effet, il est tout à fait possible d'obtenir des fractales par d'autres moyens, en travaillant par exemples avec des nombres complexes.

Nous remercions M. Laurent Karth pour son soutien et son aide, sans qui ce travail n'aurait pu voir le jour. Bien que les débuts fussent difficiles, nous avons pris beaucoup de plaisir à la rédaction de ce document et espérons qu'il pourra servir à quiconque désirent s'intéresser aux fractales ainsi qu'aux IFS.

Bibliographie

- [Bar93] Michael Fielding Barnsley. *Fractals Everywhere, second edition*. Academic Press Professional, 1993. Le livre le plus complet traitant des fractales. [5](#)
- [Tan04] Bibliothèque Tangente. *Les Fractales - Art, Nature et Modélisation*. POLE, 2004. Un magazine relativement adapté au public traitant des fractales dans leur globalité.

Webographie

- [1] Le code mathematica initial, développé à l'université de Rhodes Island par Mustafa Kulenovic et Joe DeAlmo. <http://www.math.uri.edu/~kulenm/honprsp02/sourcecode.html> (dernière consultation le 20 février 2014).
- [2] Continuité. http://fr.wikipedia.org/wiki/Continuit%C3%A9#D.C3.A9finition_pour_les_fonctions_r.C3.A9elles (dernière consultation le 8 mars 2014).
- [3] À propos de la Leçon sur les parties compactes de \mathbb{R}^m : petit traité pas très compact sur les compacts, rédigé en janvier 2009 par Jean-François Burnol de l'université de Lille 1 . <http://jf.burnol.free.fr/agregcompacte.pdf> (dernière consultation le 14 mars 2014).
- [4] Ensembles complets. http://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_complet (dernière consultation le 6 mars 2014).
- [5] 1. Espaces metriques , de l'université d'Aix Marseille. <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/licence.d/topo/chap1.pdf> (dernière consultation le 7 mars 2014).
- [6] Fiche de cours 2 : Quelques rappels de topologie sur un espace métrique, de l'école polytechnique CMAP. http://www.cmap.polytechnique.fr/~lefebvre/SEMESTRE_EV2/Cours2.pdf (dernière consultation le 7 mars 2014).
- [7] Espaces métriques et ensembles complets. <http://www.les-mathematiques.net/a/m/o/node4.php> (dernière consultation le 14 mars 2014).
- [8] CHAPITRE 2 Limites et continuité, de la FSMP. <http://www.math.jussieu.fr/~polo/1M001/ch2-26sepQ.pdf> (dernière consultation le 7 mars 2014).
- [9] Chapitre 1, Espaces Métriques, Suites de l'université d'Aix Marseille. <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~rigat/Licence/chapitre1.pdf> (dernière consultation le 21 mars 2014).

- [10] Métriques. http://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9trique_%28math%C3%A9matiques%29 (dernière consultation le 6 mars 2014).
- [11] 2.2 Suites réelles, d'Henin Thomas de l'université HUB. http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/fedc_homepage/xplore/ebooks/html/maku/makuhtmlnode9.html (dernière consultation le 17 janvier 2014).
- [12] Notion de distance. http://fr.wikipedia.org/wiki/Distance_%28math%%A9matiques%29%29#Distance_ultram.C3.A9trique (dernière consultation le 6 mars 2014).
- [13] Suite de Cauchy non convergente. http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Cauchy (dernière consultation le 6 mars 2014).
- [14] Théorème du point fixe de Banach et quelques applications. http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_du_point_fixe_de_Banach#Applications_classiques (dernière consultation le 5 juin 2014).

Liste des notations

Nous exposons ici diverses notations qui ont été utilisées dans ce document afin d'en faciliter la lecture.

\forall	signifie "pour tout".
\exists	signifie "il existe".
(x_n)	signifie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. C'est simplement un moyen permettant d'alléger la notation.
$f^{\circ n}(x)$	signifie que nous appliquons n fois la fonction f à x . Pour $n = 0$, nous avons que $f^{\circ n}(x) = x$. Par exemple, $f^{\circ 3}(x) = f(f(f(x)))$.
$m \wedge n$	signifie que nous prenons le plus petit des deux nombres.
$m \vee n$	signifie que nous prenons le plus grand des deux nombres.
$B(s, \epsilon)$	représente le sous-ensemble de points compris dans la boule de centre s et de rayon ϵ , c'est-à-dire les $x \in X$ tel que $d(x, s) < \epsilon$.

Résumé

Ce travail commence par décrire les espaces métriques, leurs caractéristiques ainsi que celles de leurs sous-ensembles. Ils peuvent être fermés, ouverts, bornés, totalement bornés, compacts et/ou complets. Nous avons apporté les éléments nécessaires à la description de ces termes. Il est important de noter que la métrique choisie a une influence critique. Nous décrivons ensuite les applications contractantes et leurs propriétés. Tous ces éléments nous permettent de comprendre puis de démontrer le théorème du point fixe de Banach. Nous travaillons dès lors dans l'espace fractale, $\mathcal{H}(X)$. Ce dernier représente tous les sous-ensembles compacts de X . Nous définissons une métrique sur $\mathcal{H}(X)$ et démontrons alors que cet espace réunit toutes les conditions du théorème de Banach. Nous nous intéressons ensuite à des familles d'applications contractantes sur X , appelées IFS. Nous démontrons que ces familles sont elles aussi des applications contractantes. Nous itérons donc un IFS sur un compact et, par le théorème de Banach, nous aurons une convergence vers un point fixe unique : ce sera notre attracteur de famille de contraction, notre AFC. L'objet obtenu sera notre fractale. Nous donnons une série d'exemples d'IFS et leur fractale dans l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, \textit{Euclidien})$. Nous nous aidons d'un code Mathematica pour les représenter.

Mots clés : Espace métrique, ensemble compact, application contractante, théorème du point fixe de Banach, espace des fractales, IFS, fractale ...

Déclaration sur l'honneur

Jérémie Dujardin
Rue Xavier de Poret 11
1632 Riaz

Jérôme Scyboz
Rue Jules Bellet 14
1636 Broc

Nous certifions que le travail

Théorème du point fixe de Banach et application à la construction de fractales

a été réalisé par nous conformément au « Guide de travail » des collèges et aux
« Lignes directrices » de la DICS concernant la réalisation du Travail de Maturité.

Lieu, date :