*Histoire des mathématiques*

# Le dernier théorème de Fermat

*par Marcel Délèze*
*Décembre 2000*

## § 0 Introduction

Les mathématiques sont une science dynamique qui produit chaque année une grande quantité de nouveaux résultats mais ceux-ci restent confinés dans le cercle des spécialistes. C'est pourquoi le grand public peut avoir la fausse impression que les mathématiques sont une science figée qui n'évolue presque plus.

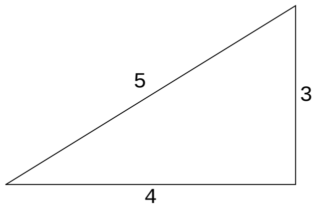
Il est exceptionnel qu'un résultat mathématique soit médiatisé. En 1993, la presse a annoncé qu'Andrew Wiles était parvenu à démontrer le dernier théorème de Fermat. L'intérêt du public pour ce problème peut être motivé par les raisons suivantes:

- l'énoncé du problème est facilement compréhensible;
- un certain mystère entoure la question de savoir si Fermat avait une démonstration;
- le problème est irrésolu depuis le milieu du XVII-ème siècle;
- le problème est devenu très célèbre; on a même poussé la grandiloquence jusqu'à parler du *Graal* des mathématiques;
- la question était devenue un sérieux défi pour les mathématiciens; ...

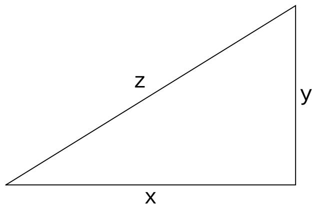
L'histoire montrera que, si l'énoncé est simple, on ne peut pas en dire autant de la solution. Parler du dernier théorème de Fermat est une gageure : on estime généralement qu'il est impossible de vulgariser les mathématiques du XX-ème siècle. Mais, rassurez-vous, nous nous limiterons à décrire les métamorphoses du problème.

# § 1 Les triplets pythagoriciens

Plusieurs millénaires avant J. - C., les Egyptiens utilisaient le triangle suivant pour obtenir un angle droit, par exemple pour construire les temples




Au VI-ème siècle avant J.-C., Pythagore effectuait des recherches mathématiques sur des thèmes géométriques. En particulier, il recherchait systématiquement les triangles rectangles dont les côtés étaient mesurés par des nombres entiers positifs.




Dans une formulation plus moderne, il recherchait les solutions de l'équation suivante dans laquelle les nombres x, y, z sont des nombres entiers positifs qui vérifient le théorème de Pythagore

$$\boxed{x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{N}^*,\ y \in \mathbb{N}^*,\ z \in \mathbb{N}^*}$$

Cette équation possède une infinité de solutions ($x$, $y$, $z$), par exemple

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$
$$...$$

# § 2 Enoncé du grand théorème de Fermat

Pierre de Fermat est un mathématicien amateur français du XVII-ème siècle (1601 - 1665). Il s'intéresse à diverses questions de théorie des nombres dont celle-ci : que se passe-t-il si, dans l'équation des triplets pythagoriciens, on remplace les carrés par des cubes:

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \text{où} \quad x \in \mathbb{N}^*,\ y \in \mathbb{N}^*,\ z \in \mathbb{N}^*$$

On n'a pas pu trouver de solutions à cette équation. Est-ce qu'un jour quelqu'un en trouvera une ou bien est-il impossible d'en trouver ?

Pour toutes les puissances supérieures, la situation est semblable

$$x^4 + y^4 = z^4 \qquad \text{où} \quad x \in \mathbb{N}^*,\ y \in \mathbb{N}^*,\ z \in \mathbb{N}^*$$
$$x^5 + y^5 = z^5 \qquad \text{où} \quad x \in \mathbb{N}^*,\ y \in \mathbb{N}^*,\ z \in \mathbb{N}^*$$
$$\ldots$$

Vers 1637, Fermat écrivit dans la marge d'un livre

*Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere : cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*

ce qui signifie approximativement

*Un cube ne peut pas être la somme de deux cubes, une quatrième puissance ne pas être la somme de deux quatrièmes puissances, et ainsi de suite pour les exposants entiers jusqu'à l'infini. J'ai découvert une merveilleuse démonstration mais la marge de cet ouvrage est trop petite pour la contenir.*

C'est donc en latin qu'il énonce la proposition qui, plus tard, sera dénommée "*le grand théorème de Fermat*". Dans un langage plus moderne,

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier},\ n \geq 3,\ \text{ il n'existe pas d'entiers positifs } x,\ y,\ z \text{ tels que } x^n + y^n = z^n}$$

Cette conjecture est aussi dénommée "*le dernier théorème de Fermat*", non parce qu'il s'agit du dernier théorème sur lequel Fermat a travaillé mais parce qu'il a été longtemps le dernier théorème de Fermat à n'avoir pas reçu de démonstration. Cette dénomination était d'ailleurs abusive car, tant que la démonstration n'a pas été produite, la proposition n'est pas un théorème mais une conjecture.

Fermat avait-il vraiment trouvé une ingénieuse démonstration ? L'affirmation de 1637 avait un caractère purement privé : une simple annotation dans un livre de sa bibliothèque personnelle. Fermat ne l'a jamais répétée par la suite. En 1659, il a même proposé à Carcavi comme problèmes à résoudre les cas particuliers $n = 3$ et $n = 4$. Il s'était probablement rendu compte que sa "preuve" était incomplète.

# § 3 Pourquoi faire une démonstration ?

Si la conjecture de Fermat a été dénommée *théorème*, c'est que beaucoup de mathématiciens avaient acquis "l'intime conviction" que la proposition était vraie. Pourquoi cela ne suffirait-il pas ?

Pour comprendre la situation, considérons une conjecture voisine due à Euler : pour $n \geq 4$, l'équation suivante ne possède aucune solution

$$x^n + y^n + z^n = c^n \qquad \text{où } x, y, z, c \text{ désignent des entiers positifs}$$

Là aussi, on fut longtemps persuadé de la justesse de la proposition. Cependant, Noam Elkies trouva un contre-exemple. Par la suite, au moyen de l'ordinateur, on trouva un contre-exemple avec des nombres plus petits

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$$

Une partie importante de l'activité mathématique consiste à trancher des conjectures, soit en donnant une preuve générale et formelle, soit en trouvant un contre-exemple. Dans le premier cas, la conjecture devient un théorème qui enrichit le savoir mathématique. Dans le second cas, la conjecture doit être abandonnée ou modifiée.

# § 4 Trois siècles et demi de recherches

Revenons au grand théorème de Fermat.

Du milieu du XVII-ème siècle jusqu'à la fin du XX-ème siècle, beaucoup de mathématiciens, des plus modestes aux plus éminents, s'acharnèrent à inventer une démonstration ou à trouver un contre-exemple. Ils ne parvinrent pas à trancher la question mais firent progresser plusieurs branches des mathématiques et obtinrent de nombreux résultats partiels.

La démonstration du cas particulier $n = 3$ fut annoncée par Euler en 1753 et publiée en 1770 : l'équation suivante ne possède aucune solution

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{N}^*, \; y \in \mathbb{N}^*, \; z \in \mathbb{N}^*$$

Sa démonstration contenait une erreur mais son effort ne fut pas inutile : une voie correcte put être trouvée par la suite.

Signalons la grande activité d'une femme mathématicienne française, Sophie Germain (1776-1831), dont les apports à la théorie des nombres furent appréciables.

En 1832, Dirichlet démontre le théorème pour $n = 14$. En 1839, Lamé démontre le cas $n = 7$.

En 1847, Lamé fit parvenir à l'Académie des Sciences une démonstration du théorème de Fermat. Une polémique s'engagea sur les lacunes de la démonstration. Les méthodes élémentaires ne permettaient plus de progresser.

Kummer fut un précurseur de la notion d'*idéal* qui allait jouer un rôle central en *algèbre moderne*. 1847 marque un tournant : l'ère des mathématiques supérieures avait débuté. Désormais, le simple bon sens ne suffira plus pour comprendre une démonstration. Il faudra encore avoir assimilé au cours d'une longue formation une théorie très abstraite et très élaborée. Dès lors, les mathématiciens amateurs ne pourront plus intervenir dans le débat. Les nouvelles méthodes algébriques de Kummer lui permirent de démontrer que la "preuve" de Lamé n'était valable que pour certaines valeurs particulières de $n$ : les nombres premiers "réguliers" tels que 3, 5, 7, 11, 13, ... mais pas 37 ni 59.

Un bon problème mathématique est un problème qui suscite la construction de concepts et de méthodes qui débordent largement le seul problème étudié. Le théorème de Fermat est un problème sur lequel on peut travailler longtemps parce que, même si on ne parvient pas à le résoudre, on peut faire des mathématiques intéressantes en chemin.

Rien qu'entre 1908 et 1912, plus de 1000 fausses preuves furent publiées.

En 1993, en combinant les méthodes de l'algèbre moderne et la puissance des ordinateurs, les mathématiciens étaient parvenus à démontrer le théorème de Fermat pour tous les $n \leq 4'000'000$.

En 1994, Wiles démontre le théorème de Fermat pour tous les entiers $n$. Il est impossible d'expliquer cette démonstration en quelques mots. Dans les paragraphes 5, 6, 7, nous nous limiterons à dégager l'articulation logique entre les étapes historiques qui aboutirent à la démonstration de Wiles.

# § 5 La conjecture de Taniyama-Shimura

Revenons un peu en arrière et ouvrons ce qui semble n'être d'abord qu'une parenthèse n'ayant rien à voir avec le théorème de Fermat. Durant le XX-ème siècle, la recherche mathématique a été très féconde et beaucoup de questions diverses et nouvelles ont été explorées. Mentionnons ici deux thèmes : les *courbes elliptiques* et les *fonctions modulaires*.

Les *courbes elliptiques rationnelles* ont pour équation

$$Y^2 = X^3 + a X + b \qquad a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q},\ X \in \mathbb{Q},\ Y \in \mathbb{Q}$$

où *a* et *b* sont des constantes. Cet objet, une simple équation cubique, est en fait d'une immense complexité.

Les *fonctions modulaires* sont des fonctions du plan complexe qui sont extraordinairement symétriques.

Pour comprendre la suite, il n'est pas nécessaire de connaître le contenu de ces deux théories mais seulement de saisir les relations qui existent entre elles. Il s'agissait de deux mondes complètement différents, étrangers l'un à l'autre. Chaque théorie avait son langage propre, ses objets propres, ses théorèmes, ses interrogations.

Taniyama et Shimura sont professeurs à l'université de Tokyo et travaillent sur les fonctions modulaires. En 1955, lors d'un symposium international, Taniyama posa plusieurs problèmes dont le suivant : démontrer que

$$\boxed{\text{toute courbe elliptique rationnelle est modulaire}}.$$

La proposition choqua l'assistance. Beaucoup furent sceptiques, mais l'idée fit son chemin. En se fondant sur des exemples et des analogies, un pont avait été créé entre deux mondes : les objets et théorèmes du monde elliptique peuvent être traduits en les objets et théorèmes du monde modulaire. Mais aucune preuve ne permettait d'établir le caractère général de cette relation. La proposition devint célèbre sous le nom de conjecture de Taniyama-Shimura.

Taniyama se suicida en 1958. Shimura vit encore. La conjecture de Taniyama-Shimura est toujours une conjecture.

# § 6 Le théorème de Frey-Serre-Ribet

Rappelons que, jusqu'ici, la conjecture de Taniyama-Shimura n'avait encore aucun rapport avec le théorème de Fermat. En 1982, un mathématicien allemand, Gerhard Frey, eu l'idée stupéfiante de relier les deux conjectures. Si le théorème de Fermat était faux, quelles en seraient les conséquences ? En supposant que (n, x, y, z) soit solution de l'équation de Fermat, il considéra la courbe elliptique rationnelle

$$Y^2 = X\,(X - x^n)\,(X + y^n)$$

qui semblait avoir l'étrange propriété de n'être pas modulaire. Reformulée par le Français Jean-Pierre Serre, cette idée devint célèbre sous le nom *de conjecture $\epsilon$ (epsilon)*

| |
|---|
| Si le théorème de Fermat est faux, alors<br>il existe une courbe elliptique rationnelle semistable non modulaire. |

En 1986, Ken Ribet, professeur à l'université de Berkeley (Californie), démontra la conjecture.

Les conséquences logiques du *théorème $\epsilon$* sont importantes.

*Si le théorème de Fermat est faux*
*alors la conjecture de Taniyama-Shimura est fausse*

ou, par contraposition,

*Si la conjecture de Taniyama-Shimura est vraie*
*alors le théorème de Fermat est vrai.*

Le *théorème $\epsilon$* relègue le théorème de Fermat au rang de simple conséquence anecdotique qui découle des propriétés générales d'espaces de fonctions. Mais le problème n'est pas résolu pour autant : il est plus difficile de démontrer la conjecture de Taniyama-Shimura que le théorème de Fermat.

En utilisant la propriété "semistable", on peut tirer une proposition plus intéressante encore:

*Si toute courbe elliptique rationnelle semistable est modulaire*
*alors le théorème de Fermat est vrai.*

En d'autres termes, il n'est pas nécessaire de démontrer la conjecture de Taniyama-Shimura dans toute sa généralité mais seulement dans le cas particulier des courbes "semistables".

# §7 La démonstration de Wiles

Dès que la conjecture $\epsilon$ fut démontrée par Ribet, Andew Wiles, un Anglais travaillant à l'université de Princeton (USA), s'attaqua à la démonstration de la proposition suivante

| Toute courbe elliptique rationnelle semistable est modulaire |
|---|

Il s'isola et se consacra entièrement à cette tâche,  sans révéler à quiconque l'objet de ses recherches. Il travailla sans relâche pendant 7 ans. En 1993, à Cambridge (en Angleterre), il annonça que le théorème de Fermat était démontré puis publia une démonstration de plus de 200 pages.

La presse s'empara de la nouvelle et en fit de grands titres. Les spécialistes se mirent au travail et épluchèrent la démonstration ligne par ligne, page par page. Pour communiquer, le courrier électronique fut mis à contribution.

Quelques mois plus tard, coup de tonnerre : la démonstration contenait une erreur sur un point essentiel. Une partie de la construction était à refaire sur d'autres bases.

Wiles se remit au travail. Sous le feu des projecteurs, la pression fut terrible. Cette fois, il demanda l'aide de ses collègues et ce fut Richard Taylor qui lui apporta l'élément manquant. C'est ainsi qu'en 1994 ils purent publier la démonstration du théorème. Par la même occasion, la démonstration fut un peu simplifiée et réduite à 150 pages.

Entre 1994 et 1998, on estime que des centaines de personnes ont lu la preuve mais seulement quelques centaines de personnes l'ont vraiment comprise. Il est maintenant acquis que la preuve est correcte et que le théorème est démontré. Des dizaines de spécialistes continuent de travailler dans le but de simplifier la démonstration et de la généraliser. De substancielles simplifications ont déjà été trouvées. Il reste encore à construire des généralisations pour progresser vers la démonstration de la conjecture de Taniyama-Shimura.

<u>Sources:</u>

*plusieurs sites internet anglophones.*