Jeu arithmétique M3

□ Règles du jeu

Demander à une autre personne d'effectuer les choix et calculs suivants:

1. Choisir un nombre dans $\{1, 2, \ldots, 999\}$, par exemple $s = 358$ (secret)
2. Multiplier le nombre précédent par 499: $358 \cdot 499 = 178642$ (secret)
3. Choisir un nombre naturel de six chiffres, par exemple 427831 (secret)
4. Additionner les deux derniers nombres $178642 + 427831 = 606473$ (secret)
5. Du nombre du point 3, permuter les deux tranches de trois chiffres 831427 (secret)
6. De l'avant-dernier nombre, soustraire le dernier (le résultat peut être négatif) et publier le résultat

   $606473 - 831427 = -224954 = p$

La suite du texte explique comment retrouver le nombre s du point 1, en fonction de p.

□ Fondements mathématiques

Pour déterminer le reste de la division d'un nombre par 999, diviser le nombre en tranches de trois chiffres (depuis la droite) puis faire la somme des tranches (depuis la droite). On peut itérer le procédé. Par exemple,

$$\begin{aligned} 45687342712 &\equiv 712 + 342 + 687 + 45 \pmod{999} \\ &\equiv 1786 \pmod{999} \\ &\equiv 786 + 1 \pmod{999} \\ &\equiv 787 \pmod{999} \end{aligned}$$

En effet, on a

$$1000 \equiv 999 + 1 \equiv 1 \pmod{999}$$

$$1000^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{999} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Par suite, pour un nombre décomposé en tranches de trois chiffres, $t_i \in \{0, 1, \ldots, 999\}$

$$\begin{aligned} & t_0 + 1000\, t_1 + 1000^2\, t_2 + 1000^3\, t_3 + \ldots \\ & \equiv t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots \pmod{999} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

□ Propriétés des nombres construits par les règles du jeu

Les nombres des points 3 et 5 sont égaux modulo 999.

La différence des nombres des points 3 et 5 est multiple de 999.

Les nombres des points 2 et 6 ont le même reste par division par 999.

□ Solution à l'aide des congruences

$$p \equiv 499\, s \pmod{999}$$

$$-2\, p \equiv -998\, s \equiv s \pmod{999}$$

$$\boxed{s \equiv -2\, p \pmod{999}}$$

Dans le cas où le résultat est nul, le nombre cherché est $s = 999$.

Pour l'exemple,
$$\begin{aligned} s &\equiv -2\,(-224954) \pmod{999} \\ &\equiv 2\,(954 + 224) \pmod{999} \\ &\equiv 2\,(1178) \pmod{999} \\ &\equiv 2\,(178 + 1) \pmod{999} \\ &\equiv 358 \pmod{999} \end{aligned}$$