# Jeu arithmétique P3

## Règles du jeu

Demander à une autre personne d'effectuer les choix et calculs suivants:

1. Choisir un nombre dans $\{0, 1, \ldots, 1000\}$, par exemple $s = 847$ (secret)
2. Multiplier le nombre précédent par 501: $847 \cdot 501 = 424347$ (secret)
3. Choisir un nombre naturel de six chiffres, par exemple $596241$ (secret)
4. Additionner les deux derniers nombres: $424347 + 596241 = 1020588$ (secret)
5. Du nombre du point 3, permuter les deux tranches de trois chiffres $241596$ (secret)
6. Additionner les deux derniers nombres et publier le résultat

   $1020588 + 241596 = 1262184 = p$

La suite du texte explique comment retrouver le nombre $s$ du point 1, en fonction de $p$.

## Fondements mathématiques

Pour déterminer le reste de la division d'un nombre par 1001, diviser le nombre en tranches de trois chiffres (depuis la droite) puis faire la somme alternée des tranches (depuis la droite). On peut itérer le procédé. Par exemple,

$$\begin{aligned}
45687342712 &\equiv 712 - 342 + 687 - 45 \pmod{1001}\\
&\equiv 1012 \pmod{1001}\\
&\equiv 012 - 1 \pmod{1001}\\
&\equiv 11 \pmod{1001}
\end{aligned}$$

En effet, on a

$$1000 \equiv 1001 - 1 \equiv -1 \pmod{1001}$$

$$1000^n \equiv (-1)^n \pmod{1001} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Par suite, pour un nombre décomposé en tranches de trois chiffres, $t_i \in \{0, 1, \ldots, 999\}$

$$\begin{aligned}
&t_0 + 1000\, t_1 + 1000^2\, t_2 + 1000^3\, t_3 + 1000^4\, t_4 + \ldots\\
&\equiv t_0 + (-1)\, t_1 + (-1)^2\, t_2 + (-1)^3\, t_3 + (-1)^4\, t_4 + \ldots \pmod{1001}\\
&\equiv t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + t_4 - \ldots \pmod{1001} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

## Propriétés des nombres construits par les règles du jeu

Les nombres des points 3 et 5 sont opposés modulo 1001.

La somme des nombres des points 3 et 5 est multiple de 1001.

Les nombres des points 2 et 6 ont le même reste par division par 1001.

## Solution à l'aide des congruences

$$p \equiv 501\, s \pmod{1001}$$

$$2\, p \equiv 1002\, s \equiv s \pmod{1001}$$

$$\boxed{s \equiv 2\, p \pmod{1001}}$$

Pour l'exemple, $s \equiv 2 \cdot 1262184 \equiv 2\,(184 - 262 + 1) \equiv -154 \equiv 847 \pmod{1001}$