Collège du Sud
Classes de 4-ème année
Rencontres Blaise Pascal du 23.02 & 7.03.2001
Cinquième thème : Pascal et les probabilités
Professeur : Marcel Délèze

La genèse du calcul des probabilités

ou le premier exemple de processus stochastique

§ 1 Le contexte historique

§ 1.1 On ne peut pas quantifier le hasard

Le hasard dont nous allons parler ici est essentiellement celui des jeux de hasard en général et du jeu de dés en particulier. Des notions telles que "*la probabilité de gagner*" ou "*l'espérance de gain*" nous paraissent si familières qu'il nous est difficile de penser que, au début du XVII-ème siècle, on considérait comme impossible de quantifier la probabilité. Il revient à Pascal et à quelques autres, dont Fermat, de mathématiser le hasard, ce qui donnera naissance à une nouvelle discipline appelée à un grand avenir : le calcul des probabilités.

Quels préjugés ont corseté la culture pour empêcher toute connaissance précise de la probabilité avant le XVII-ème siècle ?

Dans les domaines philosophique et scientifique prévalait encore la doctrine d'Aristote. Selon celui-ci, mathématiser le hasard est impossible puisque l'objet des mathématiques est immuable tandis que le hasard se rapporte à ce qui est contingent.

Dans les domaines moral et religieux, toute tentative de mathématiser le hasard est perçue comme une irruption dans l'ordre divin sans être motivée par la piété. Par analogie avec la divination, elle est condamnée par l'Eglise.

§ 1.2 Les sollicitations d'un ami joueur

L'expérience a appris aux joueurs que le jeu de dés obéit à certaines régularités. Par exemple, le **Chevalier de Méré** avait remarqué que, à choisir entre les deux jeux

1. obtenir au moins un six en lançant 4 fois un dé,
2. obtenir au moins un double six en lançant 24 fois une paire de dés,

il gagnait plus souvent au premier qu'au second.

■ Simulation informatique

Ne pouvant consacrer autant de temps au jeu que M. de Méré, faisons l'expérience au moyen de l'ordinateur. Les programmes informatiques ont la capacité de "tirer des nombres au hasard", ce qui peut remplacer les lancers des dés.

Nombre de parties	Nombre de 6 au jeu 1	Nombre de (6,6) au jeu 2
100	54	53
10000	5184	4877

Tant que l'on ne joue pas un très grand nombre de parties, on ne peut tirer aucune conséquence de l'expérience. Par contre, lorsqu'on joue énormément, la différence entre les deux jeux devient perceptible. Si l'on répète toute l'expérience depuis le début, on obtient d'autres résultats, mais la conclusion générale reste valable.

Nombre de parties	Nombre de 6 au jeu 1	Nombre de (6,6) au jeu 2
100	47	52
10000	5145	4899

Ne trouvant pas d'explication satisfaisante, le Chevalier de Méré sollicita l'aide du mathématicien Pascal pour résoudre l'énigme. C'est encore M. de Méré qui demanda à Pascal comment partager les mises entre les joueurs lorsqu'un jeu devait être interrompu avant la fin.

§ 1.3 La confiance dans la raison

Au début du XVII-ème siècle, comme le démontre l'oeuvre de Descartes, un mouvement rationaliste stimule le développement des sciences et l'exploration de nouveaux domaines. En voici un témoignage de Pascal.

■ Lettre à l'Académie des sciences, 1654 (extrait)

Pour la compréhension de ce texte du XVII-ème siècle, rappelons que le mot "géométrie" se traduit par "mathématiques" en français contemporain.

> *"A la très illustre Académie parisienne de science"* (traduction française d'un extrait d'une lettre de Pascal en latin datant de 1654).
>
> *"Et puis un traité tout à fait nouveau, d'une matière absolument inexplorée jusqu'ici, savoir : la répartition du hasard dans les jeux qui lui sont soumis, ce qu'on appelle en français* ***faire les partis des jeux****; la fortune incertaine y est si bien maîtrisée par l'équité du calcul qu'à chacun des joueurs on assigne toujours exactement ce qui s'accorde avec la justice. Et c'est là certes ce qu'il faut d'autant plus chercher par le raisonnement, qu'il est moins possible d'être renseigné par l'expérience. En effet les résultats du sort ambigu sont justement attribués à la contingence fortuite plutôt qu'à la nécessité naturelle. C'est pourquoi la question a erré incertaine jusqu'à ce jour; mais maintenant, demeurée rebelle à l'expérience, elle n'a pu échapper à l'empire de la raison. Et, grâce à la géométrie, nous l'avons réduite avec tant de sûreté à un art exact, qu'elle participe de sa certitude et déjà progresse audacieusement. Ainsi, joignant la rigueur*

des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard, et conciliant ces choses en apparence contraires, elle peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant : ***La Géométrie du hasard****."*

§ 1.4 Les contributions de Pascal au calcul des probabilités

Dans les paragraphes suivants, nous présentons les deux contributions essentielles

* le *problème des dés*, dont la solution de Pascal est dénommée *méthode des dés*;
  il s'agit du premier exemple traité avec ce qu'on appelle aujourd'hui les *méthodes élémentaires du calcul des probabilités*;
* le *problème des partis* ou comment partager les enjeux lorsque le jeu a été interrompu;
  la solution de Pascal est dénommée *méthode des partis*.

§ 2 La méthode des dés

Une version du premier problème posé par le Chevalier de Méré est la suivante:

Combien de fois au moins faut-t-il lancer une paire de dés pour
dépasser une chance sur deux d'obtenir au moins un double six ?

Les méthodes que nous utilisons aujourd'hui pour résoudre ce problème sont essentiellement celles que Pascal a inventées. En particulier, une idée essentielle consiste à passer à <u>l'événement complémentaire</u>. Aujourd'hui, les élèves des gymnases font des exercices de ce genre dans les cours de mathématiques. Ainsi, malgré l'importance de la question, il nous est ici possible de la laisser de côté.

■ Exercice 1 (facultatif)

Résolvez le "problème des dés" énoncé ci-dessus.
(Un corrigé est joint à la fin de ce document.)

§ 3 La méthode des partis

§ 3.1 Enonce du problème du partage des enjeux (exemple)

Deux joueurs A et B s'adonnent au jeu suivant:

* il misent 32 pistoles chacun;
* ils jouent des parties de dés auxquelles chaque joueur a une chance sur deux de gagner;
* le premier joueur qui totalise 7 parties gagnantes empoche les 64 pistoles.

Supposons maintenant que le jeu doive être interrompu au moment où le score des parties gagnées est de 5 à 4. Comment les 64 pistoles doivent-elles être réparties entre les deux joueurs ?

A l'époque, ce problème avait reçu des solutions diverses mais insatisfaisantes.

Pacioli proposait la répartition	$\frac{5}{9}$ 64 pour A, $\frac{4}{9}$ 64 pour B;
Cardan	$\frac{2}{3}$ 64 pour A, $\frac{1}{3}$ 64 pour B;
Tartaglia	$\frac{4}{7}$ 64 pour A, $\frac{3}{7}$ 64 pour B;
etc.	

De telles divergences montrent bien l'absence de tout fondement et de toute méthode dans le domaine des probabilités.

§ 3.2 La méthode des partis, cas particulier

Le Chevalier de Méré pria Pascal de se pencher sur le problème du partage des enjeux.

■ Lettre de Pascal à Fermat, 1654 (premier extrait)

> *"Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :*
> *Posons que le premier en ait deux et l'autre une; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.*
> *Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : ≪Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez; le hasard est égal; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. ≫ Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16."*

■ Exercice 2

Supposons maintenant que les deux joueurs, qui ont mis chacun 32 pistoles au jeu, ont convenu de jouer en 7 parties. Posons encore que le jeu doive être interrompu au moment où le score est de 6 parties à 5.

a) Au moyen de la méthode décrite par Pascal, effectuez la répartition des 64 pistoles entre les deux joueurs.
b) En tirer une règle générale.

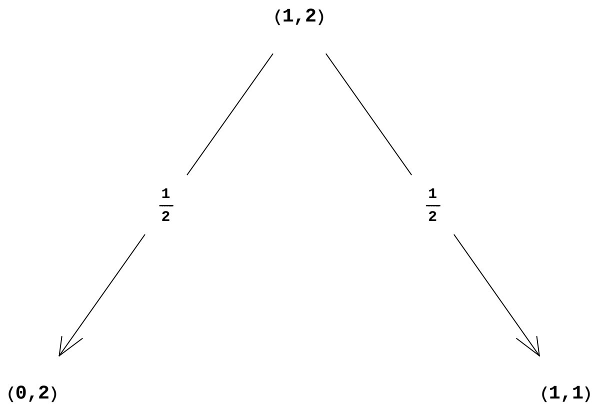
■ Reformulation en langage contemporain :
états, transitions, espérance mathématique

Nous utilisons maintenant le langage emprunté aux *processus stochastiques* et, plus particulièrement, aux ***chaînes de Markov*** (1907).

La situation du jeu à un moment donné est représentée, non par le score c'est-à-dire les parties déjà gagnées, mais par un couple dénommé **état** qui indique le nombre de parties qui restent à gagner pour conclure le jeu. L'état (m, n) signifie

il manque m parties gagnantes au joueur A pour qu'il reçoive la totalité des enjeux et
il manque n parties gagnantes au joueur B pour qu'il reçoive la totalité des enjeux.

Le premier cas particulier exposé par Pascal est l'état **(1, 2)**. Représentons les **transitions d'un état vers un ou plusieurs autres** au moyen d'un **graphe orienté** (il ne s'agit pas nécessairement d'un arbre).



Le graphe précédent se lit comme suit : à *partir de l'état (1,2), on transite*

soit vers l'état (*0, 2*) *avec la probabilité* $\frac{1}{2}$,

soit vers l'état (*1, 1*) *avec la probabilité* $\frac{1}{2}$.

Dans chaque état du jeu, le gain que le joueur A est en droit d'attendre est appelé **espérance mathématique de gain de A**, noté $E_A(m, n)$. Dans la situation du texte de Pascal, on a

l'espérance de gain du joueur A dans l'état (0, 2) est de 64 pistoles,

l'espérance de gain du joueur A dans l'état (1, 1) est de 32 pistoles,

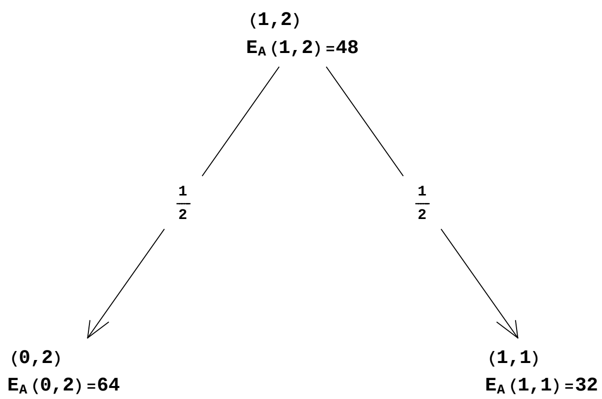
l'espérance de gain du joueur A dans l'état (1, 2) est de 48 pistoles,

ce que l'on note

$$E_A\,(0,\,2) = 64$$
$$E_A\,(1,\,1) = 32$$
$$E_A\,(1,\,2) = 48$$

On peut superposer cette information au graphe. On lit alors (voir le graphe ci-dessous)

à partir de l'état (1, 2) *dont l'espérance de gain pour A est de 48, on peut transiter soit vers l'état* (0, 2) *avec la probabilité de* $\frac{1}{2}$, *soit vers l'état* (1, 1) ...



Il n'est pas nécessaire de parler de la part que reçoit le joueur B car ce dernier reçoit le reste. Dans chacun des états, on a

(espérance de gain de B) = 64 − (espérance de gain de A)

c'est-à-dire

$$E_B\,(m,\,n) = 64 - E_A\,(m,\,n)$$

On dit que les gains bruts des joueurs A et B sont des **variables aléatoires**. Nous pourrions en considérer d'autres comme

$a =$ gain net du joueur A (c'est-à-dire après déduction de la mise),

$b =$ gain net du joueur B,

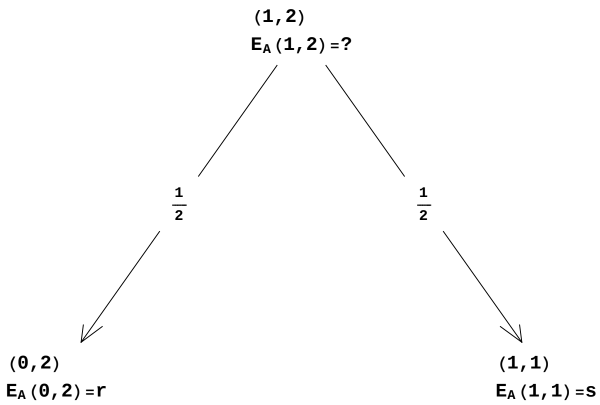
dont les espérances mathématiques valent respectivement

$$E_a(m, n) = E_A(m, n) - 32$$

$$\begin{aligned} E_b(m, n) &= E_B(m, n) - 32 \\ &= (64 - E_A(m, n)) - 32 = 32 - E_A(m, n) \\ &= -E_a(m, n) \end{aligned}$$

■ Exercice 3

Pascal a raisonné avec des enjeux de 64 pistoles. Nous aimerions maintenant établir une formule plus générale. Supposons que, si A joue une partie de plus et la gagne, il reçoit r pistoles; par contre, s'il la perd, il reçoit s pistoles. (On suppose $r > s$.)



Le jeu ayant été interrompu avant que cette hypothétique partie ait été jouée, combien le joueur A doit-il reçevoir ? Exprimez le résultat par une formule algébrique et sous la forme d'une règle verbale.

Indication. Raisonnez comme Pascal :

Combien de pistoles sont assurées ?

Combien sont soumises au hasard du jeu ?

§ 3.3 La méthode des partis, cas général

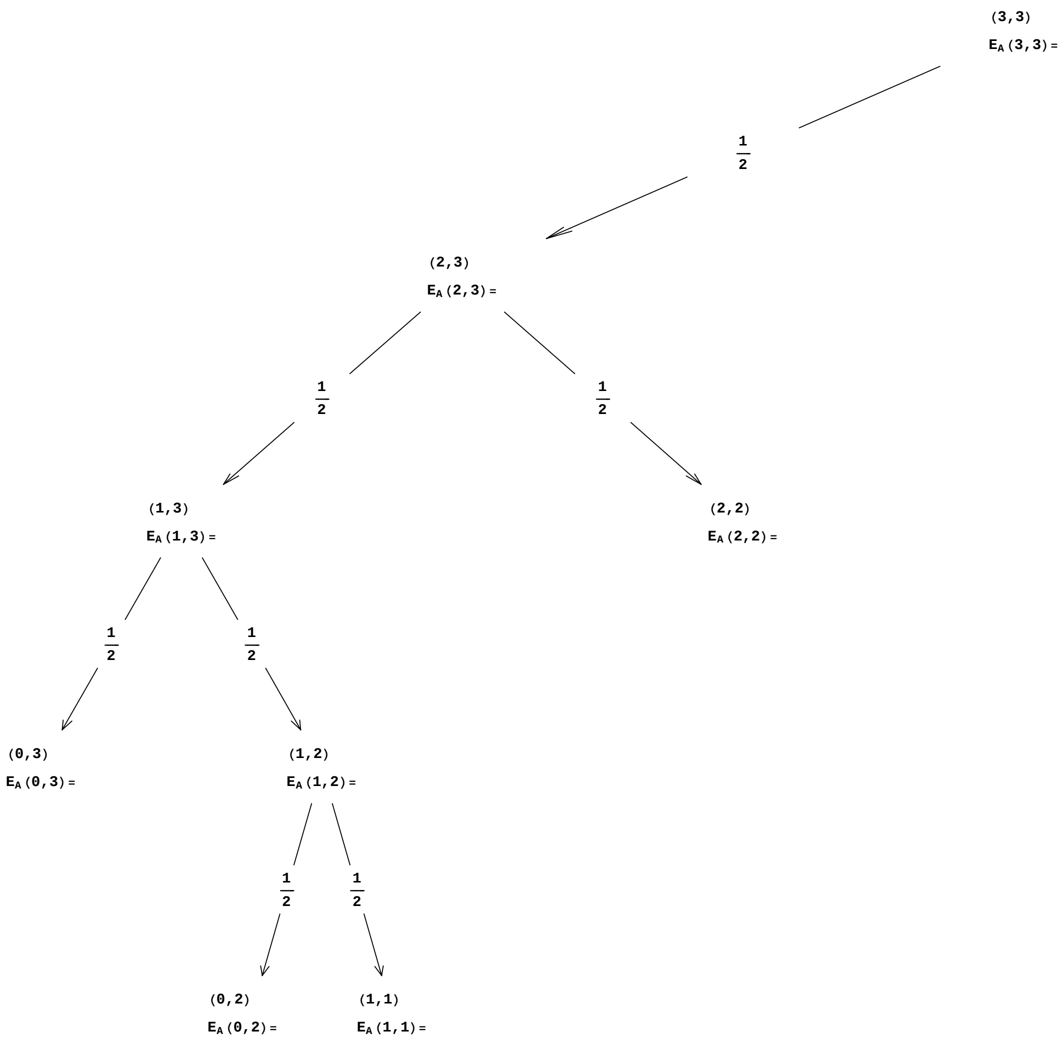
Lisons maintenant la suite du texte précédent. Rappelons que les joueurs jouent en 3 parties.

■ Lettre de Pascal à Fermat, 1654 (deuxième extrait)

"Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.
Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles: donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi: ≪ Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48: donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi.≫ Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.
Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il y aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56; s'il la perd, ils sont partie à partie: donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire: ≪Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12, et moi 12, qui, avec 32, font 44.≫ "

■ Exercice 4

a) Placez les résultats obtenus par Pascal dans le graphe suivant:



b) Expliquez comment calculer systématiquement l'espérance de gain de tous les états.

c) Ecrivez la formule générale pour calculer $E_A(m, n)$ en fonction de ses deux successeurs.

§ 4 Christiaan Huygens

La première personne à poursuivre avec succès les travaux de Pascal sur les jeux de hasard fut le mathématicien et physicien hollandais Christiaan Huygens. Durant la période 1655 - 1657, il généralise la méthode de Pascal au cas où les probabilités de transition sont inégalement réparties. Il est aussi le premier à utiliser le terme d' ≪ *espérance (Hoffnung)* ≫.

> *"Wenn die Anzahl der Fälle, in denen ich die Summe* ***a*** *erhalte, gleich* ***p****, und die Anzahl der Fälle, in denen ich die Summe* ***b*** *erhalte, gleich* ***q*** *ist und ich annehme, dass alle Fälle gleich leicht eintreten können, so ist der Werth meiner Hoffnung gleich* $\frac{p\,a+q\,b}{p+q}$*."*

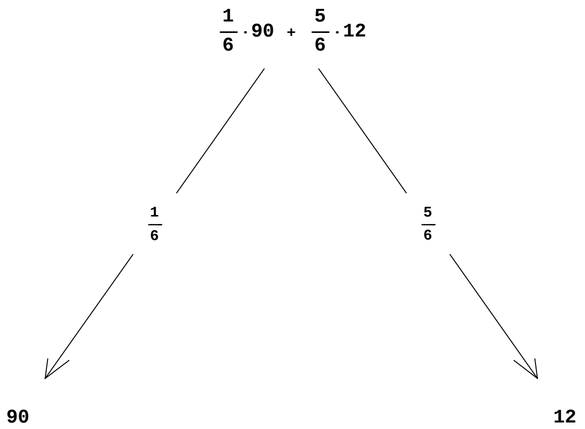
Pour comprendre le texte, prenons un exemple. A un certain moment d'un jeu, le joueur A se trouve dans la situation suivante : si, en lançant une fois le dé, il amène le six, alors il gagne 90 Fr, sinon il gagne 12 Fr. Huygens raisonne comme suit:

dans 1 cas, il gagne 90,
dans 5 cas, il gagne 12;

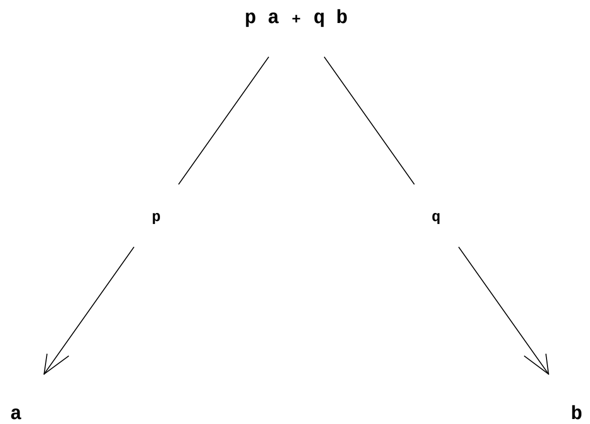
les 6 cas ensemble totalisent (1·90 + 5·12);
si les 6 cas sont équiprobables, l'espérance du joueur est

$$\frac{1 \cdot 90 + 5 \cdot 12}{5 + 1} = \frac{1}{6}\, 90 + \frac{5}{6}\, 12 = 25$$

Sous la forme d'un graphe, l'exemple numérique se représente comme suit



Sous la forme d'un graphe, en notant p, q les probabilités de transition vers les états qui lui succèdent ($p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$) et a, b l'espérance de gain des deux états successeurs, la règle de Huygens se représente comme suit



En formule,

$$\boxed{E_A\,(m,\, n) = p\, E_A\,(m - 1,\, n) + q\, E_A\,(m,\, n - 1)}$$

■ Exercice 5

Lorsqu'un client fait un achat important, un commerçant lui offre une carte de loterie comportant 12 cases à gratter. Ces cases sont distribuées sur 3 lignes de 4 cases. Le joueur doit respecter les règles suivantes.

1. Grattez une case de la première ligne. Si vous tombez sur la case à 2 Fr, (il y en a 1 sur les 4), vous gagnez la somme indiquée et le jeu est terminé. Sinon, vous pouvez passer au point 2.
2. Grattez une case de la deuxième ligne. Si vous tombez sur une case à 4 Fr, (il y en a 2 sur les 4), vous gagnez la somme indiquée et le jeu est terminé. Sinon, vous pouvez passer au point 3.
3. Grattez une case de la troisième ligne. Si vous tombez sur la case à 40 Fr, (il y en a 1 sur les 4), vous gagnez la somme indiquée sinon vous gagnez 8 Fr.

Quelle est la valeur d'une telle carte de loterie ?

§ 5 Corrigés des exercices

■ Corrigé de l'exercice 1

$$p\,\{\text{en } n \text{ lancers, le nombre de double six} \geq 1\}$$
$$= 1 - p\,\{\text{en } n \text{ lancers, il n'y a aucun double six}\}$$
$$= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2}$$

La probabilité d'obtenir au moins un double six en 24 lancers d'une paire de dés est inférieure à $\frac{1}{2}$:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.4914$$

La réponse à la question de M. de Méré est $n = 25$ car

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \simeq 0.5055$$