De la composition de taux à l'espace vectoriel des taux

Marcel Délèze, Collège du Sud, 1630 Bulle

Dans la majorité des livres scolaires, les chapitres consacrés à l'utilisation des taux font intensément appel à des notions voisines. Par exemple, l'étude des intérêts composés est fondée sur la notion de valeur acquise. Dans les problèmes qui s'y prêtent, pourrait-on ne calculer qu'avec des taux ? Comment plusieurs taux se combinent-ils pour former un seul taux global ?
Chemin faisant, nous visiterons des structures algébriques: groupe commutatif, $\mathbb{Z}$-module à gauche, espace vectoriel réel et isomorphisme d'espaces vectoriels.

§ 1 Le groupe commutatif des taux

■ § 1.1 Composition de taux

Si une grandeur positive augmente de 20% puis de 30%, le taux global d'augmentation est $(1+0.2)(1+0.3)-1=0.56$, ce que nous voulons traduire par une loi de composition en notation additive $20\,\% \oplus 30\,\% = 56\,\%$.

Si une grandeur positive subit une variation d'un taux égal à -1, la grandeur en question devient nulle. Pour éviter les transitions irréversibles, limitons les taux admissibles aux nombres réels supérieurs à -1: $\boxed{\mathbb{T} =]-1;\ \infty[}$

Sur cet ensemble, définissons une loi de composition interne $(\mathbb{T},\ \mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{T}$ comme suit $(a,\ b) \mapsto \boxed{a \oplus b = (1+a)(1+b) - 1 = a + b + a \cdot b}$

Puisque $1+a > 0$ et $1+b > 0$, il s'ensuit que $(a \oplus b) > -1$. La ≪ somme ≫ $a \oplus b$ représente le taux global qui résulte lorsqu'une grandeur positive varie d'un taux a, puis d'un taux b.

■ § 1.2 Le groupe commutatif des taux

$(\mathbb{T},\ \oplus)$ est un groupe commutatif. Vérifions d'abord l'associativité

$$(a \oplus b) \oplus c = (a+b+a\,b) \oplus c = (a+b+a\,b)+c+(a+b+a\,b)\,c = a+b+c+a\,b+a\,c+b\,c+a\,b\,c$$
$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b+c+b\,c) = a+(b+c+b\,c)+a(b+c+b\,c) = a+b+c+a\,b+a\,c+b\,c+a\,b\,c$$

$$\boxed{a \oplus b \oplus c = (1+a)(1+b)(1+c) - 1}$$

La composition de taux est commutative: $b \oplus a = a \oplus b$
La composition de taux possède un élément neutre: $0 \oplus a = a$
Chaque $a \in \mathbb{T}$ possède un opposé $b \in \mathbb{T}$ que nous notons $\ominus a$. En effet,
$$a \oplus b = 0 \iff a + b + a\,b = 0 \iff a + b\,(1+a) = 0 \iff b = -\frac{a}{1+a}$$

$$\boxed{\ominus a = \frac{-a}{1+a}}$$

Question 1 Une grandeur positive a augmenté de 60 %. De quel taux doit-elle ensuite varier afin qu'elle retrouve sa valeur initiale ?

Réponse 1 $\ominus 60\,\% \;=\; \frac{-0.6}{1.6} \;=\; -37.5\,\%$

■ § 1.3 Résolution d'équations dans le groupe commutatif des taux

Question 2 Une grandeur positive ayant augmenté de 30%, quel est le taux d'une nouvelle augmentation afin que le taux global soit de 50%.

Réponse 2 Equation dans $\mathbb{T}$: $0.3 \oplus x = 0.5$
Ajoutons l'opposé de 0.3 aux deux membres: $x = 0.5 \oplus (\ominus 0.3)$
Valeur numérique $x = 0.5 + \frac{-0.3}{1.3} + 0.5\,\frac{-0.3}{1.3} = 0.153846$

§ 2 Le $\mathbb{Z}$-module à gauche des taux

■ § 2.1 Multiplication d'un taux par un entier relatif

Si une grandeur positive augmente 3 fois consécutivement de 20%, le taux global d'augmentation est $(1+0.2)^3 - 1 = 0.728$, ce que nous voulons traduire par une loi de composition en notation multiplicative $3 \odot 20\,\% \;=\; 72.8\,\%$.

Selon un procédé algébrique général, tout groupe commutatif peut être regardé comme un module à gauche sur l'anneau des entiers relatifs. Pour ce faire, on définit une multiplication extérieure $\mathbb{Z} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T},\ (n,\ a) \;\mapsto\; n \odot a$ comme suit.

Pour n positif, $n \odot a$ représente le taux global qui résulte lorsqu'une grandeur positive varie n fois du taux a: $n \odot a \;=\; a \oplus a \oplus \ldots \oplus a \;\;(n\text{ termes}) \;=\; (1+a)^n - 1.$
Pour $n = 0$, $0 \odot a \;=\; 0 \;=\; (1+a)^0 - 1.$
Pour n négatif, $n \odot a$ représente le taux global qui résulte lorsqu'une grandeur positive varie $(-n)$ fois du taux opposé à a:
$$n \odot a \;=\; (-n) \odot (\ominus a) \;=\; (-n) \odot \left(\frac{-a}{1+a}\right) \;=\; \left(1 + \frac{-a}{1+a}\right)^{-n} - 1 \;=\; \left(\frac{1}{1+a}\right)^{-n} - 1 \;=\; (1+a)^n - 1.$$

Finalement, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\boldsymbol{n \odot a \;=\; (1+a)^n - 1}}$

■ § 2.2 Le module à gauche des taux sur l'anneau $\mathbb{Z}$

La construction précédente aboutit au module $(\mathbb{T},\ \oplus,\ \odot)$ sur l'anneau $\mathbb{Z}$. En particulier, les conditions suivantes sont vérifiées pour tous les $k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}$ et pour tous les $a \in \mathbb{T},\ b \in \mathbb{T}$:

$k \odot (n \odot a) \;=\; (k \cdot n) \odot a$ $\qquad$ $1 \odot a \;=\; a$

$(k+n) \odot a \;=\; (k \odot a) \oplus (n \odot a)$ $\qquad$ $n \odot (a \oplus b) \;=\; (n \odot a) \oplus (n \odot b)$

$\ominus(n \odot a) \;=\; (-n) \odot a$

■ § 2.3 Résolution d'équations dans le module des taux

Question 3 Une grandeur positive subit 12 augmentations consécutives de 8%, puis une treizième de taux inconnu. Le taux global ainsi obtenu est égal à celui qui résulte de 15 augmentations de 10%. Quel est le taux de la treizième augmentation ?

Réponse 3 Soit x le taux cherché. Equation $(12 \odot 0.08) \oplus x = 15 \odot 0.1$
Résolution dans $\mathbb{T}$: $x = (15 \odot 0.1) \oplus (\ominus(12 \odot 0.08)) = (15 \odot 0.1) \oplus ((-12) \odot 0.08)$
Calcul numérique: $x = (1.1^{15} - 1) + (1.08^{-12} - 1) + (1.1^{15} - 1)(1.08^{-12} - 1) = 0.658843$

§ 3 L'espace vectoriel des taux

■ § 3.1 Multiplication d'un taux par un nombre réel

Si u est un taux par unité de temps et n le nombre d'unités de temps, alors $n \odot u$ représente le taux global à l'instant n, ce qui donne aussi un sens au cas où n n'est pas entier.

Pour $n \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{T}$, définissons $\boxed{\boldsymbol{n \odot u = (1 + u)^n - 1}}$

■ § 3.2 L'espace vectoriel à gauche des taux sur le corps $\mathbb{R}$

Avec la définition précédente, $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel à gauche sur le corps $\mathbb{R}$. En particulier, pour $n \neq 0$, l'équation $n \odot x = a$ possède une et une seule solution $x = (\frac{1}{n}) \odot a$.

■ § 3.3 Résolution d'équations dans l'espace vectoriel des taux

Question 4 Une grandeur positive a subi 5 augmentations consécutives de 10%. On veut ramener l’augmentation globale à 20% en faisant varier la grandeur trois fois d'un même taux. Quel est ce taux ?

Réponse 4 Equation: $(5 \odot 0.1) \oplus (3 \odot x) = 0.2$
Résolution dans $\mathbb{T}$: $3 \odot x = 0.2 \oplus (\ominus(5 \odot 0.1)) = 0.2 \oplus ((-5) \odot 0.1)$
≪ multiplions ≫ les deux membres par $\frac{1}{3}$:

$$x = (\tfrac{1}{3}) \odot (0.2 \oplus ((-5) \odot 0.1)) = (\tfrac{1}{3} \odot 0.2) \oplus (\tfrac{-5}{3} \odot 0.1)$$

Calcul numérique: $x = \left(1.2^{\frac{1}{3}} - 1\right) + \left(1.1^{-\frac{5}{3}} - 1\right) + \left(1.2^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(1.1^{-\frac{5}{3}} - 1\right) = -0.0934204$

§ 4 Isomorphisme avec l' ≪ espace des durées ≫

■ § 4.1 Durée d'un placement

Pour $u \in \mathbb{T}$ et $u \neq 0$, la solution $n \in \mathbb{R}$ de l'équation $n \odot u = a$ est $(1+u)^n - 1 = a \iff n \cdot \ln(1+u) = \ln(1+a) \iff n = \frac{\ln(1+a)}{\ln(1+u)}$, ce qui nous amène à introduire la famille de fonctions $\varphi_u : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\boxed{\boldsymbol{\varphi_u(a) = \frac{\ln(1+a)}{\ln(1+u)} = \log_{1+u}(1+a)}}$

Le taux par unité de temps u étant fixé, $\varphi_u(a)$ est appelé ≪ durée du placement qui produit le taux global a ≫ ou ≪ durée du placement pour obtenir le rendement a ≫.

Pour $u \in \mathbb{T}$ et $u \neq 0$, nous avons montré que tout taux a se laisse écrire sous la forme $n \odot u$. En d'autres termes, $\{u\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{T}$; donc $\mathbb{T}$ est un espace vectoriel réel de dimension un.

<u>Question 5</u> En combien d'années un capital, placé à 5% l'an, s'accroît-il de 75% ?

<u>Réponse 5</u> $\varphi_{0.05}(0.75) = \log_{1.05}(1.75) = \dfrac{\ln(1.75)}{\ln(1.05)} = 11.4698$

La durée peut être négative. Par exemple, $\varphi_{-0.1}(0.8) = -5.57881$ unités de temps, ce qui situe l'état ≪ 80% de plus qu'au temps 0 ≫ dans le passé.

■ § 4.2 L'espace vectoriel des taux $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ et l'espace vectoriel des durées $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sont isomorphes

En effet, pour tout $u \in \mathbb{T}$ et $u \neq 0$, φ_u est bijective et sa réciproque est ${}^r\varphi_u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}$,

$$\boxed{{}^r\boldsymbol{\varphi_u}\,(\boldsymbol{y}) \;=\; (\mathbf{1} + \boldsymbol{u})^{\boldsymbol{y}} - \mathbf{1}}$$

De plus, $\varphi_u(a \oplus b) = \log_{1+u}(1 + (a \oplus b)) = \log_{1+u}(1 + a + b + a\,b) =$
$\log_{1+u}((1 + a)\,(1 + b)) = \log_{1+u}(1 + a) + \log_{1+u}(1 + b) = \varphi_u(a) + \varphi_u(b)$

et $\varphi_u(n \odot a) = \log_{1+u}(1 + (n \odot a)) = \log_{1+u}((1 + a)^n) = n \cdot \log_{1+u}(1 + a) = n \cdot \varphi_u(a)$

En particulier, $\varphi_u(0) = 0$, $\varphi_u(u) = 1$, $\varphi_u(a) \odot u = a$.

<u>Question 6</u> Si, pour des capitaux placés à un taux annuel donné, il faut attendre n_1 années pour obtenir un rendement de 20% et n_2 années pour obtenir un rendement de 30%, quel rendement obtient-on en attendant $n_1 + n_2$ années ? Le résultat dépend-il du taux annuel ?

<u>Réponse 6</u> Par isomorphisme, le taux de rendement est

$${}^r\varphi_u(n_1 + n_2) = {}^r\varphi_u(n_1) \oplus {}^r\varphi_u(n_2) = 30\,\% \oplus 20\,\% = 56\,\%.$$

Le résultat est indépendant du taux annuel.

<u>Question 7</u> Soit a le taux de rendement correspondant à une durée déterminée. Si on multiplie la durée du placement par un facteur réel n, quel est le nouveau taux de rendement ?

<u>Réponse 7</u> Par isomorphisme, le taux de rendement est

$${}^r\varphi_u(n \cdot \varphi_u(a)) = {}^r\varphi_u(\varphi_u(n \odot a)) = n \odot a = (1 + a)^n - 1.$$

■ § 4.3 Résolution d'équations vectorielles via un isomorphisme

Au lieu de résoudre une équation vectorielle dans $\mathbb{T}$ avec les opérations $\oplus$ et $\odot$, on peut, au moyen d'un isomorphisme, la transporter dans ≪ l'espace des durées ≫ où la résolution s'effectue avec les opérations usuelles + et $\cdot$. Le résultat est ensuite ramené dans $\mathbb{T}$ au moyen de la réciproque de l'isomorphisme.

Question 8 Une grandeur positive a subi 4 diminutions successives de 20%, puis, en cinq augmentations d'un même taux, le taux global est amené à +30%. Quel est le taux des cinq augmentations ?

Réponse 8 Equation dans T: $(4 \odot (-0.2)) \oplus (5 \odot x) = 0.3$

Choisissons arbitrairement $u = 1$.

$\varphi_1((4 \odot (-0.2)) \oplus (5 \odot x)) = \varphi_1(0.3)$

$4 \cdot \varphi_1(-0.2) + 5 \cdot \varphi_1(x) = \varphi_1(0.3)$

$\varphi_1(x) = (\varphi_1(0.3) - 4 \cdot \varphi_1(-0.2)) / 5 = 0.333245$

$x = {}^r\varphi_1(0.333245) = 2^{0.333245} - 1 = 0.259844$

§ 5 Règle de réciprocité et rôle du taux par unité de temps

$\varphi_u(a) \cdot \varphi_a(u) = \frac{\ln(1+a)}{\ln(1+u)} \cdot \frac{\ln(1+u)}{\ln(1+a)} = 1$, d'où $\boxed{\boldsymbol{\varphi_a(u) = \frac{1}{\varphi_u(a)}}}$

En mots: si on intervertit les rôles du taux de rendement et du taux par unité de temps, alors la durée correspondante est inversée. Par exemple, si, au taux annuel de 4%, le rendement de 60.1% est atteint en 12 ans, alors, au taux annuel de 60.1%, le rendement de 4% est atteint en un mois.

En combinant cette formule avec les propriétés de l'isomorphisme, on obtient, pour des taux a, u et v non nuls, $\varphi_a(u \oplus v) = \varphi_a(u) + \varphi_a(v)$, d'où

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{\varphi_{u \oplus v}(a)} = \frac{1}{\varphi_u(a)} + \frac{1}{\varphi_v(a)}}}$$

et $\varphi_a(n \odot u) = n \cdot \varphi_a(u) \implies \frac{1}{\varphi_{n \otimes u}(a)} = \frac{n}{\varphi_u(a)}$ d'où

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi_{n \odot u}(a) = \frac{\varphi_u(a)}{n}}}$$

Question 9 Pour qu'un capital croisse d'un taux a donné, on sait qu'il faut 13 ans si le taux annuel est u, et 17 ans si le taux annuel est v. Combien de temps faut-il si le taux annuel est $u \oplus v$?

Réponse 9 Soit n le nombre d'années pour obtenir le rendement a au taux annuel $u \oplus v$. D'après l'avant-dernière formule encadrée, $\frac{1}{n} = \frac{1}{13} + \frac{1}{17} = \frac{30}{221}$. Donc $n = \frac{221}{30} = 7$ ans 134 jours.

Question 10 Un capital est placé au taux annuel de 7% pendant quelques années. Quel devrait être le taux annuel pour que le même rendement soit obtenu en trois fois moins de temps ?

Réponse 10 La dernière formule encadrée donne le taux annuel $3 \odot 7\,\% = 22.5043\,\%$