Journées ≪Diderot et l'Encyclopédie≫ Février 2002
Thème : dynamique Professeur : Marcel Délèze

Le principe de D'Alembert

Introduction

■ La dynamique

La *mécanique* est la partie de la physique qui étudie le mouvement des corps. Les fondements de la *mécanique classique* ont été apportés par Galilée et Newton.

La *dynamique* est la partie de la mécanique qui met le mouvement en relation avec les forces qui le provoquent.

Au XVIII-ème siècle, la physique classique est déjà bien établie et la recherche se livre à des approfondissements. Le principe de D'Alembert permet de ramener les problèmes de dynamique à des problèmes de statique à condition d'introduire de nouvelles forces appelées *forces d'inertie*.

■ Une question de relativité

Considérons deux personnes qui décrivent le même objet; alors que le premier dessine un rectangle, le deuxième dessine un disque. N'y voyez aucune contradiction : ils ont tous deux observé une tour cylindrique, le premier en vue frontale, le deuxième en vue d'avion.

En dynamique aussi, l'observation dépend du point de vue que l'on adopte. Plus précisément, la description du mouvement dépend du système de référence que l'on choisit. C'est ainsi que, là où Newton affirme "*la force centrifuge n'existe pas*", D'Alembert dit "*on peut adopter un point de vue tel que la force centrifuge existe*".

Quelle influence sur les lois de la physique exerce un changement de système de référence ? C'est la question centrale que nous allons maintenant développer.

■ Une entreprise de vulgarisation

J'ai d'abord pensé que le thème *Le principe de D'Alembert* était de niveau universitaire et difficilement accessible aux élèves du gymnase. Mais je n'ai pas renoncé à le présenter car D'Alembert lui-même m'a encouragé à la persévérence:

> *Ainsi, il est peut-être vrai de dire qu'il n'y a presque point de science ou d'art dont on ne pût à la rigueur, et avec une bonne logique, instruire l'esprit le plus borné; parce qu'il y en a peu dont les propositions ou les règles ne puissent être réduites à des notions simples, et disposées entre elles dans un ordre si immédiat , que la chaîne ne se trouve nulle part interrompue. La lenteur plus ou moins grande des opérations de l'esprit exige plus ou moins cette chaîne, et l'avantage des plus grands génies se réduit à en avoir moins besoin que les autres, ou plutôt à la former rapidement et presque*

sans s'en apercevoir.
D'Alembert [Discours préliminaire]

Je n'ai pas adopté une démarche historique mais didactique. Les idées essentielles ont été simplifiées, situées dans leur contexte logique et exprimées dans un langage que j'espère adapté au niveau des licéens.

§ 1 Galilée

§ 1.1 Quelques repères historiques

Galileo Galilei (1564-1642) est né 153 ans avant D'Alembert. Galilée est connu pour avoir

* découvert certaines lois fondamentales de la physique concernant la chute des corps et l'oscillation du pendule;
* construit de nouveaux intruments de physique : le thermomètre et la lunette astronomique;
* soutenu Copernic dans son affirmation que la terre tourne autour du soleil;
* été poursuivi par le Saint-Office comme hérétique.

§ 1.2 Loi d'inertie et système de référence galiléen

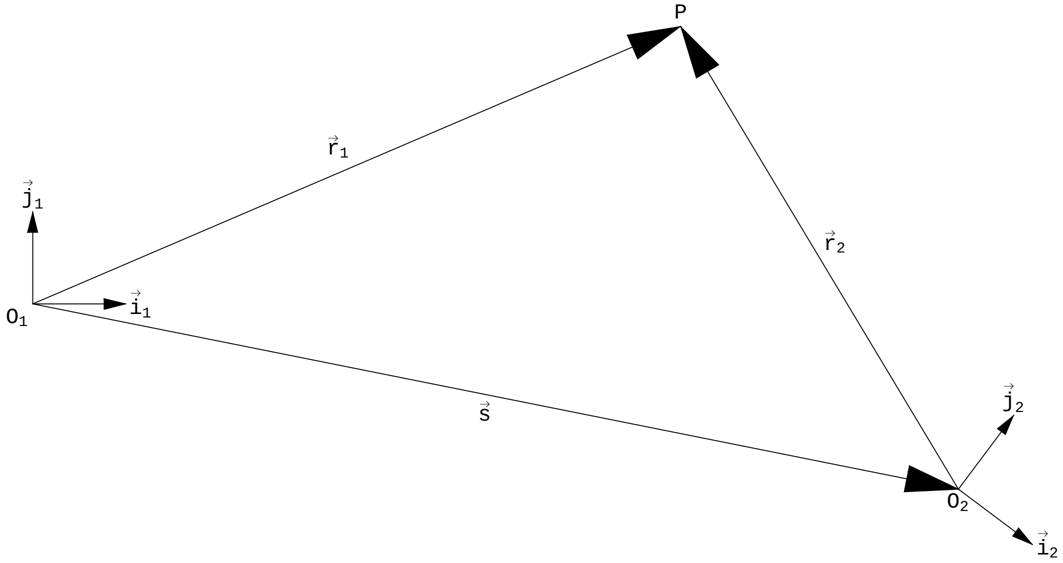
■ Loi d'inertie

Tout corps qui n'est soumis à aucune force est en mouvement rectiligne uniforme.
Réciproquement, pour tout corps en mouvement rectiligne uniforme, la résultante des forces qui s'exercent sur lui est nulle.

■ Systèmes de référence

Dans la figure ci-dessous, à l'instant t, une masse m se trouve au point P. Selon que l'on choisit le système de référence $\left(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\right)$ ou $\left(O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2\right)$, le vecteur-lieu de la masse m à l'instant t sera $\vec{r}_1(t) = \overrightarrow{O_1 P} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1$ ou $\vec{r}_2(t) = \overrightarrow{O_2 P} = x_2 \vec{i}_2 + y_2 \vec{j}_2 + z_2 \vec{k}_2$.

Fig. 1.1



■ Système de référence d'inertie ou système de référence galiléen

On appelle *système de référence d'inertie* (ou *système de référence galiléen*) tout système de référence dans lequel la loi d'inertie est valable.

Pratiquement, on vérifie expérimentalement que
sachant qu'aucune force ne s'exerce sur un corps,
* si le corps est au repos, il reste au repos;
* si le corps a une certaine vitesse initiale, il conserve cette vitesse initiale.

Dans le cas où les observations montreraient le contraire, on en déduirait que le système de référence n'est pas galiléen.

Deux systèmes de référence en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre sont équivalents: les lois de la physique ont la même forme. Il y a donc une infinité de systèmes de référence galiléens.

■ Système de référence lié au laboratoire

Pratiquement, le système de référence choisi est souvent attaché au laboratoire. Mais ce choix n'est possible que si l'on s'est assuré que le mouvement de la terre n'a pas d'influence perceptible sur l'expérience.

En 1851, au Panthéon à Paris, Léon Foucault montre au public une expérience qui deviendra célèbre sous le nom de *pendule de Foucault*. Son pendule est constitué d'une boule de laiton de 28 kg suspendue à un fil de 67 m de longueur. Le pendule est prolongé par un style qui laisse une trace au sol dans du sable fin et humide. Le pendule oscillant dans un plan vertical, l'expérience a montré que le plan d'oscillation tourne à raison d'environ $11\,°/h$. Cette rotation est due à la rotation de la terre.

Le pendule de Foucault et la force de Coriolis (voir § 6) prouvent que le système de référence attaché au laboratoire n'est pas vraiment galiléen. Mais, pour la majorité des expériences courantes, le système de référence lié au laboratoire est commode et donne des résultats d'une précision suffisante.

■ Système de référence fixe ou système de référence classique

Un système de référence usité est le suivant: l'origine est au centre de la galaxie et les axes de coordonnées sont liés aux étoiles fixes.

Un tel système de référence est galiléen. Nous le nommerons *système de référence classique* ou, par abus de langage, *système de référence fixe*.

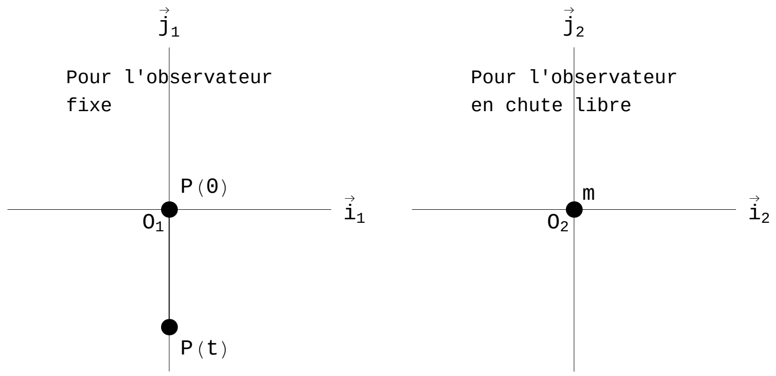
§ 1.3 Exemple du mouvement rectiligne uniformément accéléré

Considérons une cabine en chute libre, par exemple
* un ascenseur dont le câble de soutien est cassé,
* un avion en vol balistique (vol qui simule l'apesanteur), ...

■ Pour un corps en chute libre

Considérons le mouvement d'un corps lié à la cabine. Par exemple, imaginons que le passager de la cabine lâche un objet devant lui avec une vitesse initiale nulle.

Fig. 1.2



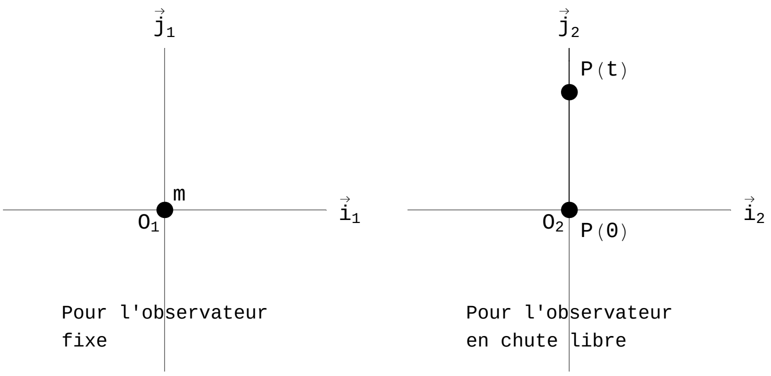
* Le système de référence fixe est un système de référence galiléen. Pour un observateur fixe, le corps effectue un mouvement accéléré vers le bas; le corps reçoit donc une force (de pesanteur) dirigée vers le bas.

* Pour un observateur en chute libre, l'objet qui tombe en chute libre avec lui reste immobile. Le système de référence est donc galiléen et les lois de la physique classique sont applicables. Il pourra, soit décréter l'absence de pesanteur (*état d'apesanteur*), soit dire que la pesanteur est compensée par une force antagoniste (appelée *force d'inertie* et dirigée vers le haut).

■ Pour un corps au repos

Considérons le mouvement d'un corps au repos par rapport à la terre, par exemple un objet fixé contre un mur.

Fig. 1.3



* Pour un observateur fixe, le corps demeure immobile.

* Pour un observateur lié à la cabine, l'objet a un mouvement accéléré vers le haut. Le corps subit donc une force résultante non nulle (dirigée vers le haut) : il s'agit d'une force d'inertie.

Nous avons montré que les forces que l'on observe dépendent du point de vue que l'on adopte. Nous nommerons *forces classiques* les forces que l'on observe par rapport à un système de référence fixe. La force de pesanteur est une force classique. Par contre, la force d'inertie n'est pas une force classique. Il existe donc des systèmes de référence galiléens qui ne sont pas des systèmes de référence fixes.

§ 1.4 Exemple du mouvement circulaire uniforme

Considérons un mouvement circulaire uniforme, par exemple

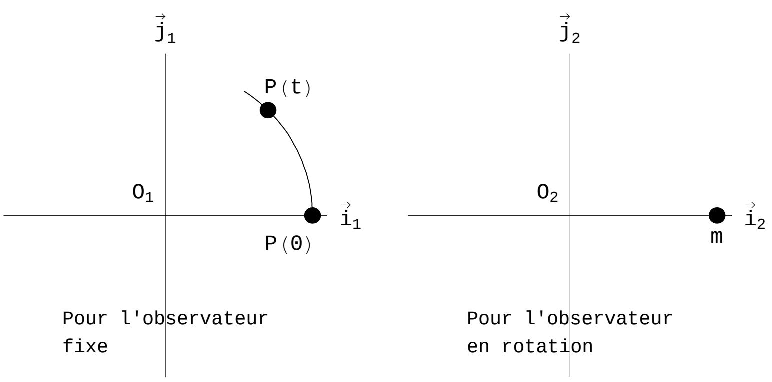
* un manège avec un observateur fixe et un observateur lié au manège, disons assis sur un cheval de bois;

* un plateau tournant dont la surface est glissante, ...

■ Corps en rotation et observateur fixe

Pour un observateur immobile situé au centre du manège, un objet entraîné par le manège a un mouvement circulaire uniforme.

Fig. 1.4

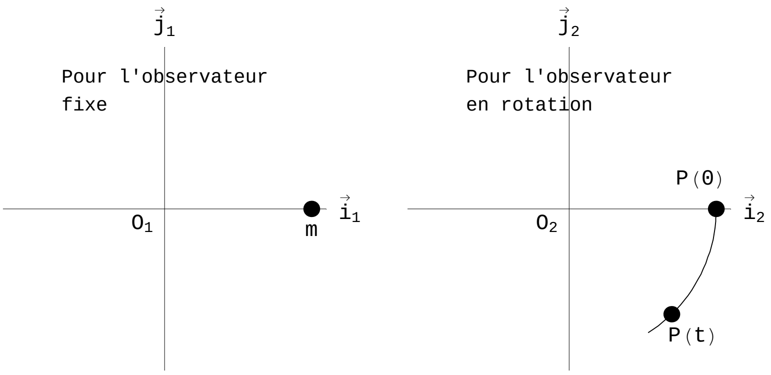


Donc la résultante des forces qui s'exerce sur lui n'est pas nulle (force centripète).

■ Corps immobile et observateur en rotation

Considérons un observateur situé au centre du manège et tournant avec le manège. Pour savoir si le système de référence est galiléen, il abandonne un corps *m* sur le plan du manège en veillant qu'aucune force ne s'exerce sur lui (la force de pesanteur est compensée par la force de soutien et le plan du manège est totalement glissant). Le comportement d'un tel corps est alors semblable à un objet indépendant du manège, par exemple une lampe fixée à un plafond immobile.

Fig. 1.5



Il constate alors que le corps a un mouvement accéléré (il tourne dans le sens opposé au manège), ce qui montre que le système de référence lié au manège n'est pas galiléen.

§ 1.5 La rupture épistémologique du XVII-ème siècle

A l'époque de Galilée, la science était dominée par la scolastique dont la démarche est la suivante: après avoir recensé les opinions sur un sujet, on examine leur compatibilité et leur recevabilité d'un point de vue philosophique et théologique. Pratiquement, cela consiste à rejeter toute opinion en contradiction avec la doctrine d'Aristote. Par exemple, le mouvement des corps est expliqué - non par la force de pesanteur - mais par le fait que chaque corps possède une place naturelle qui lui est destinée: les corps légers en haut, les corps lourds en bas.

Galilée et Bacon introduisent une nouvelle attitude dans laquelle l'expérience prévaut sur l'autorité: il vaut mieux partir de l'observation de la nature que des commentaires des traités d'Aristote. Pour expliquer le monde, Galilée et Descartes (1596-1650) font appel - non plus exclusivement à la philosophie - mais de plus en plus aux mathématiques. C'est ainsi qu'ont pu naître les sciences naturelles en tant que sciences expérimentales.

Descartes a osé du moins montrer aux bons esprits à secouer le joug de la scolastique, de l'opinion, de l'autorité, en un mot des préjugés et de la barbarie; et par cette révolte dont nous recueillons aujourd'hui les fruits, la Philosophie a reçu de lui un service, plus difficile peut-être à rendre que tous ceux qu'elle doit à ses illustres successeurs. On peut le regarder comme un chef de conjurés, qui a eu le courage de s'élever le premier contre une puissance despotique et arbitraire, et qui, en préparant une révolution éclatante, a jeté les fondements d'un gouvernement plus juste et plus heureux qu'il n'a pu voir établi.

D'Alembert [Discours préliminaire]

§ 1.6 Exercices

Un observateur est assis dans un train. Dans chacun des cas suivants, dites si le système de référence attaché au train est galiléen:

a) le train accélère uniformément sur une voie rectiligne;
b) le train roule à une vitesse constante sur une voie rectiligne;
c) avec une vitesse linéaire constante, le train parcourt une courbe dont le rayon de courbure est constant;
d) le train décélère uniformément sur une voie rectiligne;
e) le train est au repos.

§ 2 Newton

§ 2.1 Quelques repères historiques

Sir Isaac Newton (1642-1727) avait 75 ans de moins que D'Alembert. Son ouvrage *Principes mathématiques de philosophie naturelle* fut publié en 1686.

§ 2.2 La mécanique classique ou mécanique newtonienne

■ La cinématique

L'horaire est une fonction qui indique la position $\vec{r}$ qu'occupe dans l'espace la masse *m* à chaque instant *t*

$$t \mapsto \vec{r}(t)$$

La vitesse à l'instant *t* est égale à la dérivée de l'horaire

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$$

L'accélération à l'instant *t* est égale à la dérivée de la vitesse

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$$

■ Les lois de la mécanique

Newton a réduit la mécanique à quatre lois fondamentales

1. la loi d'inertie;
2. la loi de l'action et de la réaction;
3. la relation entre la force et l'accélération;
4. la loi de la gravitation universelle.

Ici, c'est surtout la troisième loi qui va nous intéresser.

■ La troisième loi de Newton

Considérons un corps de masse *m* qui est soumis à des forces dont la résultante est $\vec{F}$. Alors le corps subit une accélération $\vec{a}$ telle que

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

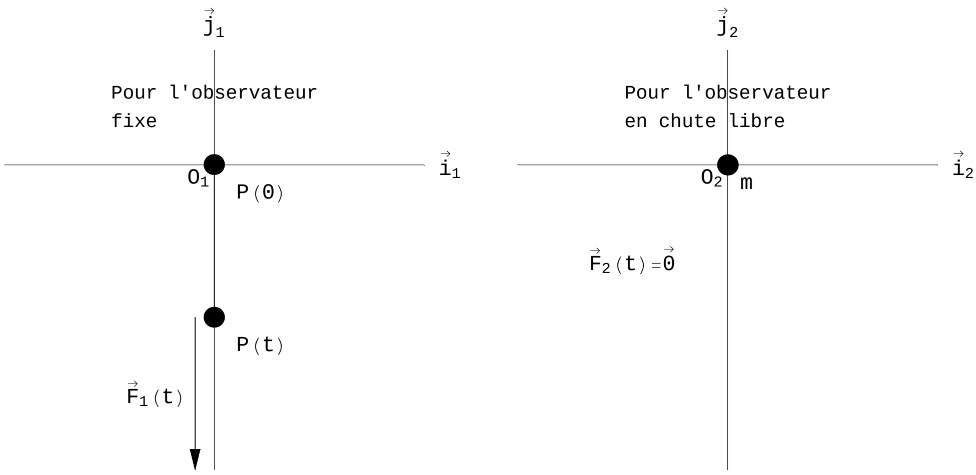
Réciproquement, si un corps de masse *m* subit une accélération $\vec{a}$, c'est qu'il est soumis à des forces dont la résultante $\vec{F}$ est égale à

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

§ 2.3 Exemple d'un corps en chute libre

Reprenons l'exemple d'une cabine en chute libre : le passager de la cabine lâche un objet devant lui avec une vitesse initiale nulle (voir § 1.3).

Fig. 2.1



<u>Par rapport à un système de référence fixe</u>

Le mouvement du corps est une chute libre, d'accélération $\vec{a}_1 = \vec{g}$

$$\vec{r}_1(t) = \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2 + \vec{r}_1(0)$$

La force résultante observée est celle de la pesanteur $\vec{F}_1$. D'après les 3-ème et 4-ème lois de Newton, on a

$$\vec{F}_1 = m\,\vec{g}$$

<u>Par rapport à un système de référence lié à la cabine</u>

Par rapport à la cabine, le corps demeure immobile : $\vec{a}_2 = \vec{0}$ et

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_2(0)$$

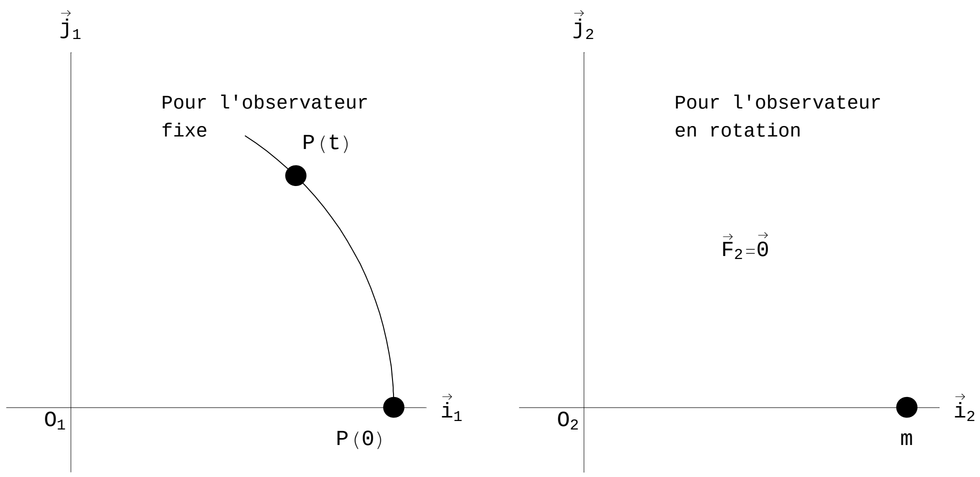
La force résultante observée est nulle $\vec{F}_2 = \vec{0}$. Puisqu'on décrit la situation par rapport à un système de référence d'inertie, la troisième loi de Newton est valide: $\vec{F}_2 = m\,\vec{a}_2$.

Dans ce système de référence, l'observateur ne détecte aucune force de pesanteur. S'il ne dispose d'aucune information en provenance de l'extérieur (pas de fenêtre, pas de téléphone, ...), il ne pourra pas savoir si la cabine est en chute libre ou immobile. Mais il pourra continuer à utiliser les lois de la physique classique.

§ 2.4 Exemple du mouvement circulaire uniforme

Reprenons l'exemple d'un corps de masse *m* entraîné par un manège ou un disque tournant (voir § 1.4).

Fig. 2.2

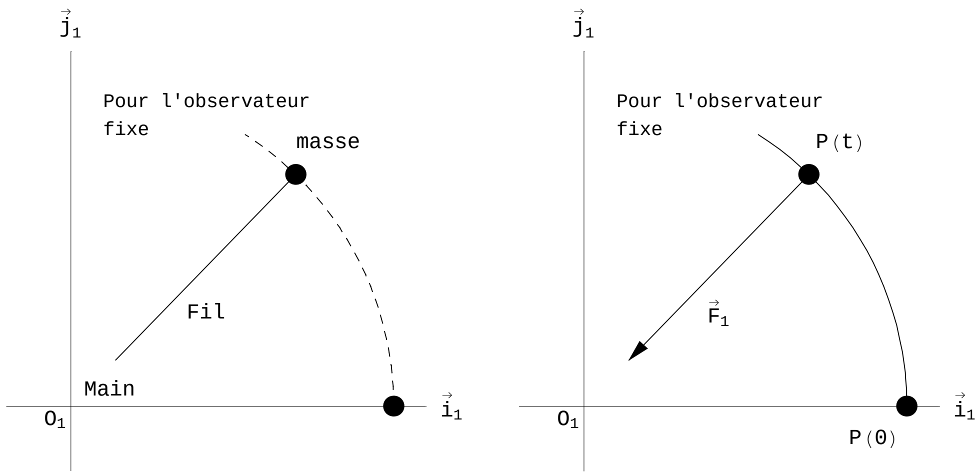


■ Par rapport à un système de référence fixe, étude qualitative

<u>Direction de la force</u>

Pour l'observateur immobile, le mouvement est circulaire uniforme. En agissant sur une masse attachée à un fil, essayons de reproduire un tel mouvement. Alors la situation sera la suivante:

Fig. 2.3

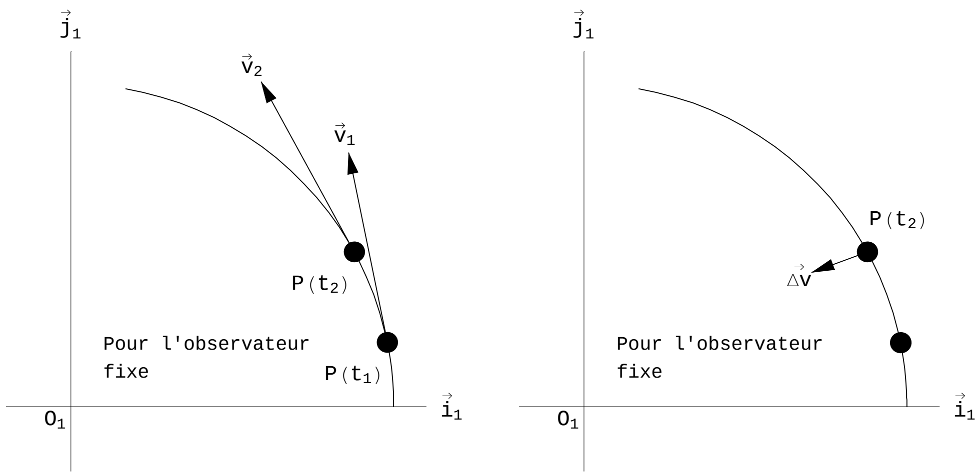


Puisque la direction du fil indique celle de la force, la force qui s'applique sur la masse est *centripète*, c'est-à-dire dirigée vers le centre.

<u>Direction de l'accélération</u>

Pour étudier comment varie la vitesse, dessinons la variation de vitesse $\vec{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ pour deux instants t_1, t_2 voisins:

Fig. 2.4



Ce vecteur pointe d'autant mieux vers le centre que les deux temps t_1, t_2 sont voisins. On en conclut que l'accélération instantanée $\vec{a}_1 = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$ est dirigée vers le centre. On dit que, dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète. En accord avec Newton, on a $\vec{F}_1 = m\,\vec{a}_1$.

■ Par rapport à un système de référence fixe, expression mathématique

Le mouvement circulaire uniforme peut être exprimé comme suit

$$\vec{r}_1(t) = d \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

où d désigne la distance au centre et ω la vitesse angulaire. Calculons sa vitesse

$$\vec{v}_1(t) = d \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}' = d \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \omega\, d \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

son accélération

$$\vec{a}_1(t) = \omega\, d \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}' = \omega\, d \begin{pmatrix} -\omega \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 d \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}_1(t)$$

puis la force résultante

$$\vec{F}_1(t) = m\, \vec{a}_1(t) = -m\, \omega^2\, \vec{r}_1(t)$$

Cette force est dirigée vers le centre de rotation. C'est pourquoi elle est appelée *force centripète*.

▪ Par rapport à un système de référence lié au manège

On ne peut pas exprimer les lois de Newton par rapport à un système de référence non galiléen. Par contre, il sera possible d'appliquer le principe de D'Alembert par rapport à ce système de référence (voir § 3.5).

§ 2.5 La rupture épistémologique du XVIII-ème siècle

Jusqu'au XVII-ème siècle, la vision du monde est imposée par la religion. La reine des sciences est la théologie à laquelle toutes les autres sont subordonnées. L'activité scientitifique n'est tolérée que dans la mesure où elle ne perturbe en rien l'ordre établi. Aucune remise en question n'est admise (condamnation de Copernic et de Galilée). La scolastique est encore présente, en particulier la négation du vide et le préjugé que la vitesse est proportionnelle à la force.

La scolastique, qui composait toute la science prétendue des siècles d'ignorance, nuisait encore aux progrès de la vraie philosophie dans ce premier siècle de lumière. On était persuadé, depuis un temps pour ainsi dire immémorial, qu'on possédait dans toute sa pureté la doctrine d'Aristote, commentée par les Arabes, et altérée par mille additions absurdes ou puériles, et on ne pensait pas même à s'assurer si cette philosophie barbare était réellement celle de ce grand homme, tant on avait conçu de respect pour les anciens! C'est ainsi qu'une foule de peuples, nés et affermis dans leurs erreurs par l'éducation, se croient d'autant plus sincèrement dans le chemin de la vérité, qu'il ne leur est pas même venu en pensée de former sur cela le moindre doute. [...]
Tant de préjugés, qu'une admiration aveugle pour l'antiquité contribuait à entretenir, semblaient se fortifier encore par l'abus qu'osaient faire quelques théologiens de la soumission des peuples.
D'Alembert [Discours préliminaire]

Dès le XVIII-ème siècle, la religion n'est plus la référence obligatoire, dans le sens que certains esprits peuvent s'en libérer. D'autres valeurs s'établissent, moins absolues, plus discutables peut-être mais assurément plus fertiles: la liberté de pensée, le rationalisme, les besoins de l'individu et de la société, le pragmatisme, etc. Désormais, les sciences pourront se développer dans un cadre idéologique élargi.

Il n'y a que la liberté d'agir et de penser qui soit capable de produire de grandes choses.
D'Alembert [Discours préliminaire]

Le savoir est une tentative de saisir l'inconnu, pas de le conjurer avec des certitudes.
G. F. Venel [article Chymie]

Notre civilisation occidentale doit beaucoup à ce séisme culturel. Actuellement encore, un siècle des Lumières, n'est-ce pas ce que nous pourrions souhaiter de mieux au monde musulman ?

§ 2.6 Exercices

Un observateur est assis dans un train. Dans chacun des cas suivants, appliquer la troisième loi de Newton, c'est-à-dire pour une masse m abandonnée sur le plancher du train, déterminez l'accélération et la force résultante par rapport à un système de référence fixe et, si possible, par rapport à un système de référence lié au train:

a) le train accélère uniformément sur une voie rectiligne;
b) le train roule à une vitesse constante sur une voie rectiligne;
c) avec une vitesse linéaire constante, le train parcourt une courbe dont le rayon de courbure est constant;
d) le train décélère uniformément sur une voie rectiligne;
e) le train est au repos.

§ 3 D'Alembert

§ 3.1 Quelques repères historiques

Jean Le Rond D'Alembert (1717 - 1783) étudie les langues anciennes, la philosophie, le droit, la médecine, les mathématiques, l'astronomie, ...

En 1743, D'Alembert publie le *Traité de dynamique*. Ses travaux en mécanique le rendirent célèbre et ses publications scientifiques se succèdent : *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (1744), *Traité sur les marées atmosphériques* (1746), ...

En 1746, il donne une démonstration partielle du théorème fondamental de l'algèbre. La démonstration sera complétée par Gauss.

A partir de 1751, il collabore avec Diderot à la rédaction de l'Encyclopédie dont il rédige le célèbre *Discours préliminaire*. En 1759, il se brouille avec Diderot et limite sa collaboration aux articles de mathématiques et de physique.

Il est élu à l'Académie française en 1754 dont il deviendra le secrétaire perpétuel en 1772.

Les Jésuites s'étant opposés à la publication de l'Encyclopédie, il écrit en 1764 un pamphlet intitulé la *Destruction des jésuites en France* et apporta son soutien à l'expulsion de l'ordre des Jésuites de France.

Il mourut en pleine gloire en 1783.

§ 3.2 Forces d'inertie

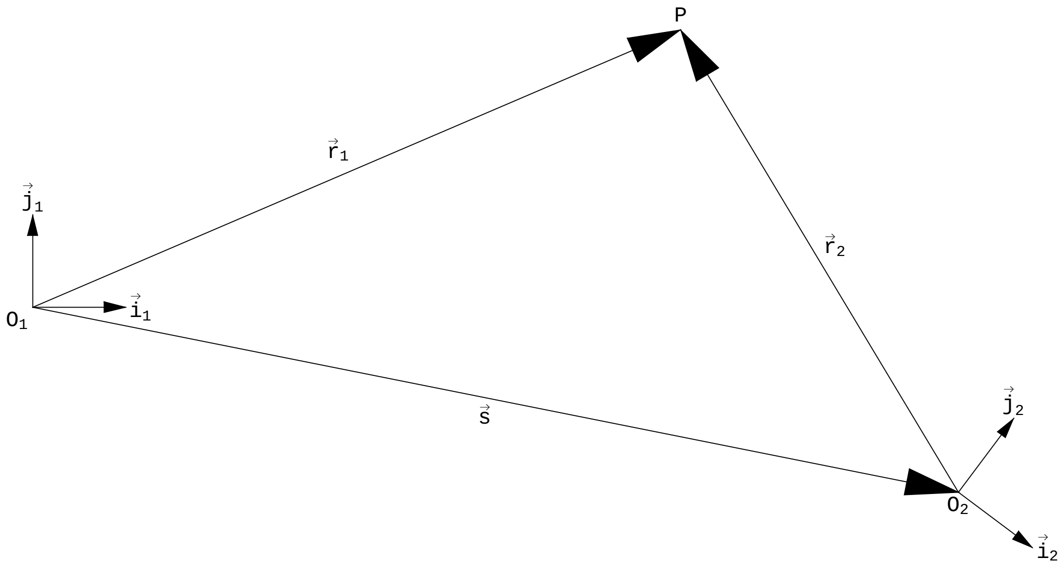
Notations

$\vec{r}_1(t) = \overrightarrow{O_1 P}$ = vecteur-lieu du point P par rapport à un système de référence fixe;

$\vec{r}_2(t) = \overrightarrow{O_2 P}$ = vecteur-lieu du point P par rapport à un deuxième système de référence quelconque;

$\vec{s}(t) = \overrightarrow{O_1 O_2} = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ = horaire du 2-ème système de référence par rapport au premier.

Fig. 1.1



$$\overrightarrow{O_1 P} = \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 P}$$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{s}(t) + \vec{r}_2(t)$$

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{s}(t)$$

Vitesses

$$\vec{v}_2(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{s}'(t)$$

Accélérations

$$\vec{a}_2(t) = \vec{a}_1(t) - \vec{s}''(t)$$

Forces

$$m\,\vec{a}_2(t) = m\,\vec{a}_1(t) - m\,\vec{s}''(t)$$

$$\vec{F}_2(t) = \vec{F}_1(t) - m\,\vec{s}''(t)$$

$\vec{F}_1(t)$ =résultante des forces classiques sur la masse m;

$\vec{F}_2(t)$ =résultante des forces observées dans le deuxième système de référence.

Après le changement de système de référence apparaît une nouvelle force appelée *force d'inertie*:

$$\boxed{\vec{F}_2(t) = \vec{F}_1(t) + \vec{F}_{\text{inertie}}(t) \quad \text{où} \quad \vec{F}_{\text{inertie}}(t) = -m\,\vec{s}\,''(t)}$$

Notez que la force d'inertie n'existe que lorsque le système de référence n'est pas un système de référence d'inertie.

§ 3.3 Le principe de D'Alembert

Si on choisit le système de référence lié au corps dont on décrit le mouvement, alors le corps est immobile par rapport à ce système de référence. La résultante des forces qui agissent sur le corps est donc nulle : $\vec{F}_2(t) = \vec{0}$ et

$$\vec{F}_1(t) + \vec{F}_{\text{inertie}}(t) = \vec{0}$$

Le problème de dynamique est ainsi formellement ramené à un problème de statique. Mais, aux forces classiques $\vec{F}_1(t)$, il est alors nécessaire de rajouter une force supplémentaire appelée *force d'inertie*

$$\vec{F}_{\text{inertie}}(t) = -m\,\vec{s}\,''(t)$$

En d'autres termes, le principe de D'Alembert permet d'étendre le champ d'application des lois de Newton à des systèmes de référence non galiléens.

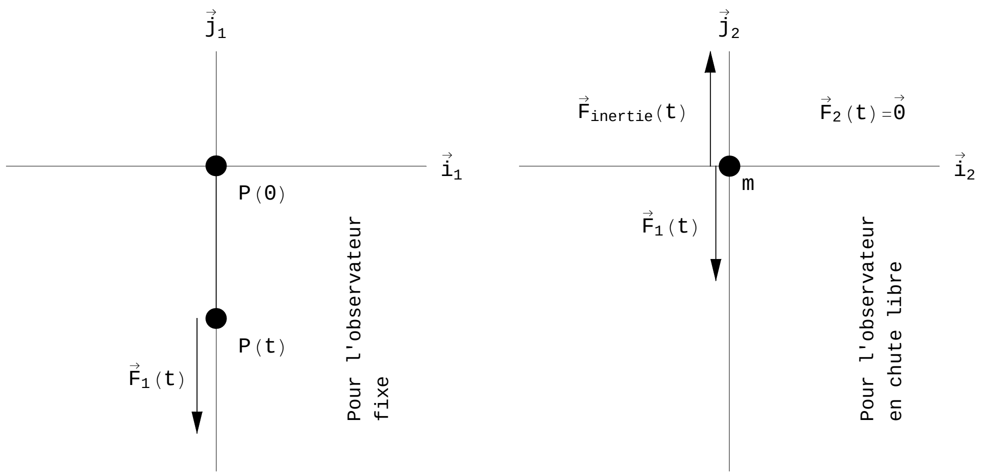
Pour simplifier, nous avons limité le principe de D'Alembert à une seule masse m mais, dans son *Traité de dynamique*, D'Alembert l'a formulé pour un système matériel. Le champ d'application du principe de D'Alembert est donc bien plus étendu que ce qui est présenté ici.

§ 3.4 Mouvement d'un corps en chute libre

■ Etude qualitative

Reprenons l'exemple d'une cabine en chute libre (voir § 1.3 et 2.3).

Fig. 3.1



Partons du point de vue de l'observateur dans la cabine. Il peut dire que le corps n'est soumis à aucune force : $\vec{F}_2 = \vec{0}$ (état d'apesanteur).

S'il apprend que la pesanteur existe ($\vec{F}_1 \neq \vec{0}$), il devra introduire une autre force (force d'inertie) qui lui est opposée : $\vec{F}_1 + \vec{F}_{\text{inertie}} = \vec{0}$.

Remarquez que la force d'inertie qui existe dans le système de référence lié à la cabine n'existe pas dans un système de référence fixe. Selon le système de référence dans lequel on se situe, on n'observe pas les mêmes forces.

■ Expression mathématique

Le système de référence lié à la cabine a l'horaire d'un mouvement uniformément accéléré $\vec{r}_2(t) = \vec{0}$ et

$$\vec{s}\,(t) = \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2 + \vec{s}_0 = \vec{r}_1\,(t)$$

Les forces en présence sont
 * la force de pesanteur (qui est une force classique) $\vec{F}_1(t) = m\,\vec{g}$
 * la force d'inertie (puisque le système de référence lié à l'ascenseur n'est pas fixe)

$$\vec{F}_{\text{inertie}}\,(t) = -m\,\vec{s}''\,(t) = -m\left(\frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2 + \vec{s}_0\right)'' = \left(-m\,\vec{g}\,t\right)' = -m\,\vec{g}$$

Dans ce cas particulier, la force d'inertie est appelée *force d'entraînement*.

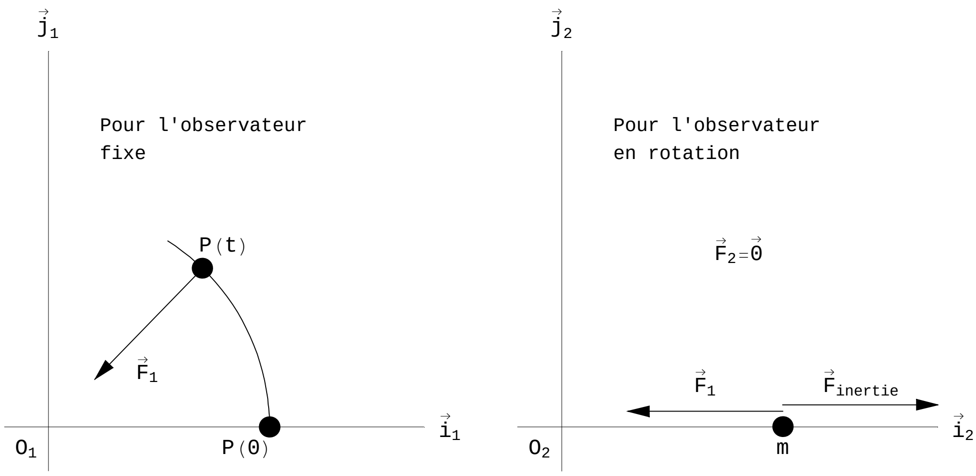
Le principe de D'Alembert affirme que la somme de ces deux forces est nulle $\vec{F}_1(t) + \vec{F}_{\text{inertie}}(t) = \vec{0}$. L'obervateur sait que la force de pesanteur existe et constate qu'elle est compensée par une force d'entraînement qui lui est opposée.

§ 3.5 Corps et observateur en rotation

■ Etude qualitative

Reprenons l'exemple d'un observateur attaché à un disque tournant (voir § 1.4 et 2.4) en partant du point de vue de l'observateur en rotation.

Fig. 3.2



Il peut dire que la résultante des forces qui s'exerce sur le corps est nulle : $\vec{F}_2 = \vec{0}$. Mais, comme le système de référence n'est pas galiléen, il sait que la force centripète existe : $\vec{F}_1 \neq \vec{0}$.

Il devra introduire une autre force (force d'inertie) qui lui est opposée : $\vec{F}_1 + \vec{F}_{\text{inertie}} = \vec{0}$.

Remarquez que la force centrifuge qui existe dans le système de référence lié au manège n'existe pas dans un système de référence fixe. Selon le système de référence dans lequel on se situe, on n'observe pas les mêmes forces.

■ Expression mathématique

Fixons les origines des systèmes de référence au centre du manège $O_1 = O_2 = O$. Par rapport au système de référence fixe, le corps a un mouvement circulaire uniforme

$$\vec{r}_1(t) = d\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix}$$

et, par rapport au système de référence tournant, le corps a une position fixe

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_2(0)$$

d'où

$$\vec{s}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) = d\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix} - \vec{r}_2(0)$$

où d désigne la distance au centre et ω la vitesse angulaire.

La résultante des forces classiques se réduit à la force centripète (voir § 2.4) $\vec{F}_1(t) = -m\,\omega^2\,\vec{r}_1(t)$
Calculons la force d'inertie par rapport au premier système de référence:

$$\vec{F}_{\text{inertie}}(t) = -m\,\vec{s}\,''(t) = -m\,d\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix}'' =$$

$$-m\,d\begin{pmatrix}-\omega\sin(\omega t)\\ \omega\cos(\omega t)\end{pmatrix}' = -m\,d\begin{pmatrix}-\omega^2\cos(\omega t)\\ -\omega^2\sin(\omega t)\end{pmatrix} = m\,\omega^2\,d\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix} = m\,\omega^2\,\vec{r}_1(t)$$

Par rapport au deuxième système de référence, cette force devient

$$\vec{F}_{\text{inertie}}(t) = m\,\omega^2\,\vec{r}_2(t) = m\,\omega^2\,\vec{r}_2(0)$$

Dans ce cas particulier, la force d'inertie est appelée *force centrifuge*.

Le principe de D'Alembert affirme que la somme de ces deux forces est nulle. L'obervateur sait que la force centripète existe et constate qu'elle est compensée par une force centrifuge qui lui est opposée.

§ 3.6 Exercices

Un observateur est assis dans un train. Quelles sont les forces qu'il peut observer et comment s'applique le principe de D'Alembert durant les intervalles de temps suivants

a) le train accélère uniformément sur une voie rectiligne;
b) le train roule à une vitesse constante sur une voie rectiligne;
c) avec une vitesse linéaire constante, le train parcourt une courbe dont le rayon de courbure est constant;
d) le train décélère uniformément sur une voie rectiligne;
e) le train est au repos.

§ 4 Systèmes de référence non galiléens

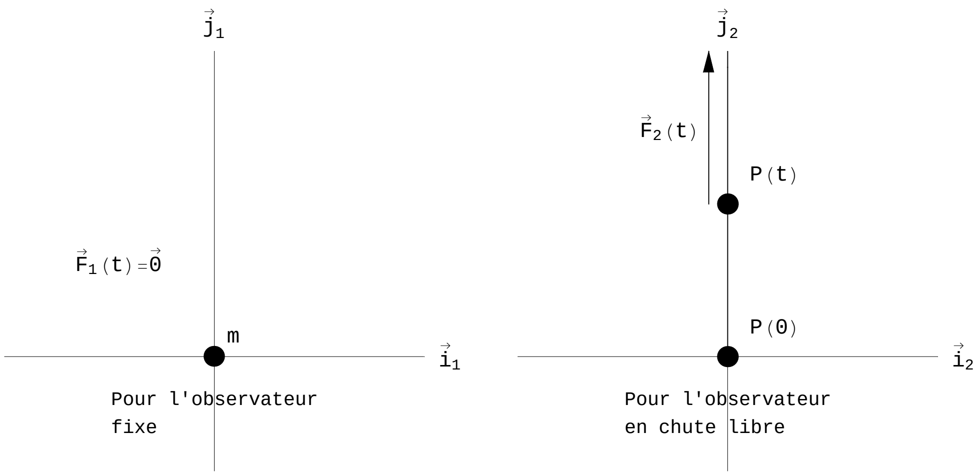
Nous avons déjà rencontré des systèmes de référence non galiléens mais, jusqu'ici, ils étaient liés au corps en mouvement. Dans ce paragraphe, le corps sera en mouvement par rapport au deuxième système de référence. Nous n'appliquerons donc plus le principe de D'Alembert proprement dit mais la règle plus générale du changement de système de référence décrite dans le § 3.2. En d'autres termes, nous mettrons en oeuvre le principe de relativité qui fonde et généralise le principe de D'Alembert.

§ 4.1 Corps immobile et observateur en chute libre

▪ Etude qualitative

Le corps immobile est observé du point de vue du passager de la cabine qui est en chute libre (voir § 1.3).

Fig. 4.1



Le mouvement de ce corps sera perçu comme accéléré vers le haut. Donc une force résultante $\vec{F}_2$ s'exerce sur le corps. Il s'agit d'une force d'inertie $\vec{F}_2 = \vec{F}_{\text{inertie}}$ dirigée vers le haut et appelée *force d'entraînement*.

▪ Expression mathématique

Pa rapport à un système de référence fixe, on a

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_1(0) \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_1(t) = \vec{0}$$

Exprimons ce "mouvement" par rapport au système de référence mobile (voir § 3.2):

$$\vec{r}_2(t) = -\frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{r}_2(0)$$

$$\vec{s}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{s}(0)$$

$$\vec{s}\,'(t) = \vec{g}\,t$$

$$\vec{s}''(t) = \vec{g}$$

$$\vec{F}_{\text{inertie}}(t) = -m\,\vec{s}''(t) = -m\,\vec{g}$$

$$\vec{F}_2(t) = \vec{F}_1(t) + \vec{F}_{\text{inertie}}(t) = \vec{0} + \vec{F}_{\text{inertie}}(t) = -m\,\vec{g}$$

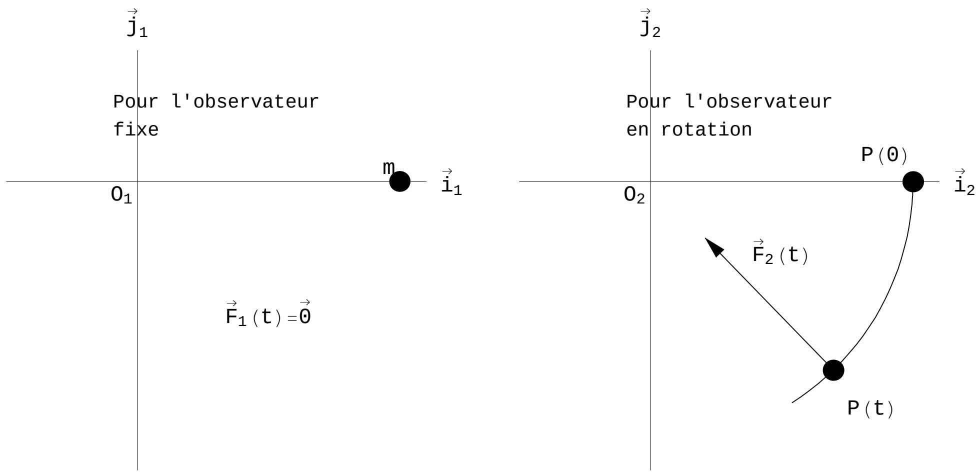
Le corps subit une force résultante dirigée vers le haut. Il s'agit d'une force d'inertie.

§ 4.2 Corps immobile et observateur en rotation

■ Etude qualitative

Dans la figure suivante, le manège tourne dans le sens direct. L'observateur voit un mouvement circulaire uniforme dans le sens inverse de celui du manège.

Fig. 4.2

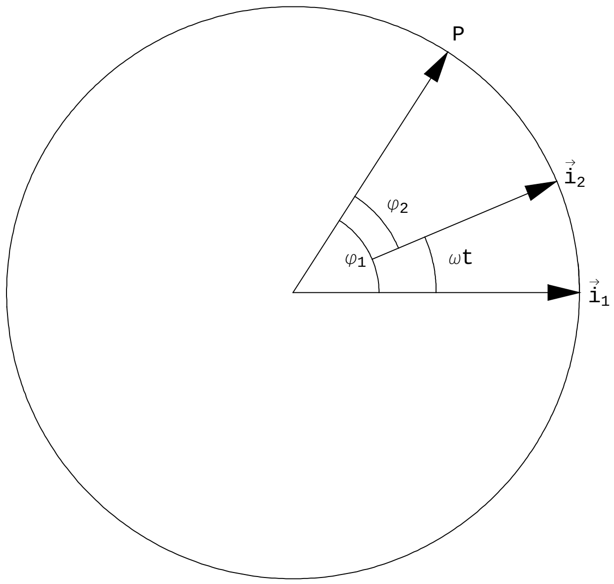


Le raisonnement que nous avons développé au § 2.4 montre que le corps est soumis à une force centripète $\vec{F}_2(t)$.

■ Expression mathématique

Fixons les origines des systèmes de référence au centre du manège $O_1 = O_2 = O$. Supposons que la base $\left(\vec{i}_1,\ \vec{j}_1\right)$ est fixe et que $\left(\vec{i}_2,\ \vec{j}_2\right)$ tourne à une vitesse angulaire constante ω. Désignons par φ_1, respectivement par φ_2 les angles horaires de la masse m par rapport aux deux systèmes de référence.

Fig. 4.3



$$\vec{r}_1(t) = d\begin{pmatrix}\cos(\varphi_1)\\ \sin(\varphi_1)\end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad d \text{ et } \varphi_1 \text{ sont constants}$$

$$\vec{F}_1(t) = \vec{0}$$

$$\vec{r}_2(t) = d\begin{pmatrix}\cos(\varphi_2)\\ \sin(\varphi_2)\end{pmatrix} = d\begin{pmatrix}\cos(\varphi_1 - \omega t)\\ \sin(\varphi_1 - \omega t)\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2(t) = d\begin{pmatrix}(-\omega)\,(-\sin(\varphi_1 - \omega t))\\ (-\omega)\cos(\varphi_1 - \omega t)\end{pmatrix} = \omega\, d\begin{pmatrix}\sin(\varphi_1 - \omega t)\\ -\cos(\varphi_1 - \omega t)\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2(t) = \omega\, d\begin{pmatrix}(-\omega)\cos(\varphi_1 - \omega t)\\ -(-\omega)\,(-\sin(\varphi_1 - \omega t))\end{pmatrix} = -\omega^2 d\begin{pmatrix}\cos(\varphi_1 - \omega t)\\ \sin(\varphi_1 - \omega t)\end{pmatrix} = -\omega^2\, \vec{r}_2(t)$$

$$\vec{s}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$$

$$\vec{s}''(t) = \vec{0} - \vec{a}_2(t) = \omega^2\, \vec{r}_2(t)$$

$$\vec{F}_{\text{inertie}}(t) = -m\,\vec{s}''(t) = -m\,\omega^2\, \vec{r}_2(t)$$

$$\vec{F}_2(t) = \vec{F}_1(t) + \vec{F}_{\text{inertie}}(t) = -m\,\omega^2\, \vec{r}_2(t)$$

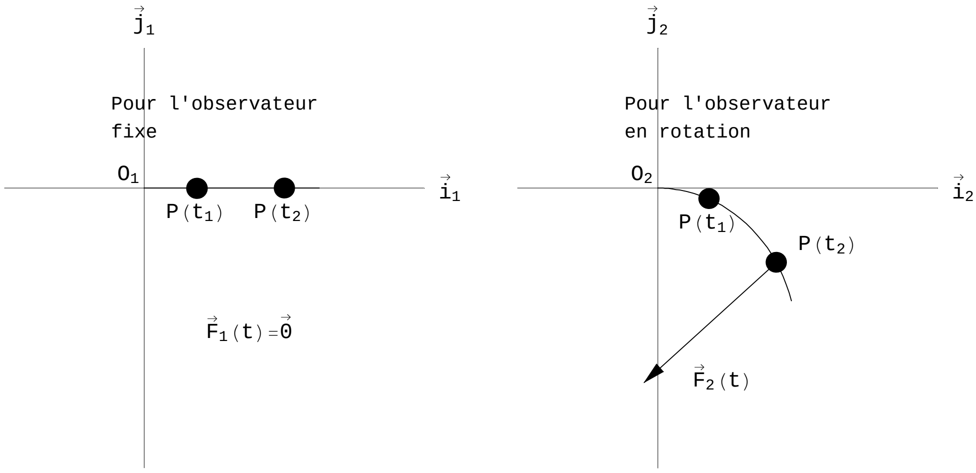
§ 4.3 Force de Coriolis en dimension 2

Considérons à nouveau un disque tournant à une vitesse angulaire constante et dont le plateau est bien lisse et glissant. Lançons une masse m, radialement depuis le centre, avec une vitesse initiale $\vec{v}_1(0) = \vec{v}$. On suppose que le plateau n'exerce aucune force sur la masse.

■ Etude qualitative

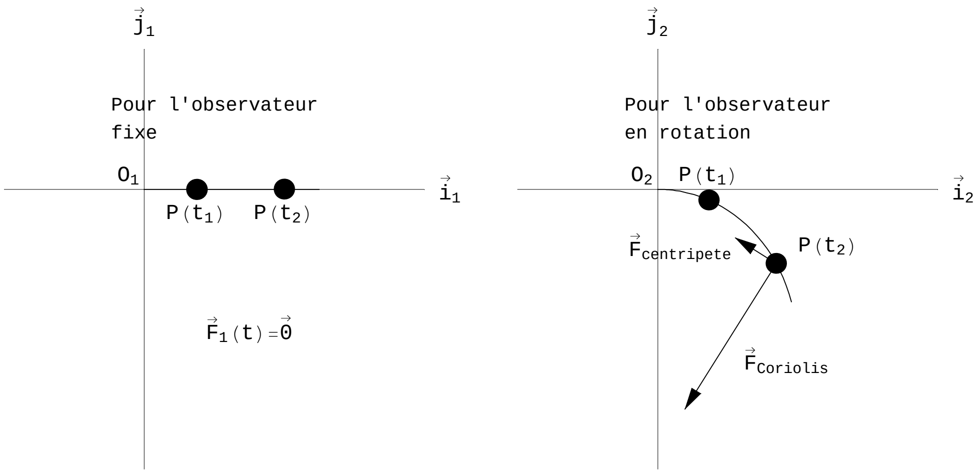
Alors que l'observateur fixe verra un mouvement rectiligne uniforme, l'observateur lié au plateau verrra une trajectoire incurvée, comme le montrent les figures 4.3 et 4.4 dans lesquelles le manège tourne dans le sens direct.

Fig. 4.4



Nous avons vu, dans le § 4.2, qu'un corps au repos était soumis à une force centripète. Nous pouvons nous attendre à ce que cette force agisse aussi ici. Décomposons $\vec{F}_2$ en deux composantes : une composante centrale (direction PO_2) et une direction perpendiculaire au rayon PO_2:

Fig. 4.5



L'observateur qui tourne avec le plateau peut observer l'action d'une force dans la direction opposée au sens de rotation : c'est la *force de Coriolis.*

Intuitivement, si l'observateur tourne alors que le corps ne tourne pas, le corps va prendre de plus en plus de "retard angulaire" sur la rotation du manège.

■ Expression mathématique

Nous utilisons les même systèmes de référence et les mêmes notations que dans le § 4.2.

Hypothèses

$r_1(t) = r_2(t) = v\,t$

$\varphi_1(t) = \varphi_1(0)$ donc $\varphi_1{}'(t) = 0$

$$\vec{r}_1(t) = v\,t \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2(t) = v\,t \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} = v\,t \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \sin(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) = v\,t \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}\,'(t) = v \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix} + v\,t \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix}' =$$

$$v \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix} + v\,t \begin{pmatrix} 0 - (-\omega)\,(-\sin(\varphi_1 - \omega\,t)) \\ -(-\omega)\cos(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix} =$$

$$v \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix} + \omega\,v\,t \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}\,''(t) =$$

$$v \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix}' + \omega\,v \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix} + \omega\,v\,t \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix}' =$$

$$\omega\,v \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix} + \omega\,v \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix} + \omega\,v\,t \begin{pmatrix} -(-\omega)\cos(\varphi_1 - \omega\,t) \\ (-\omega)\,(-\sin(\varphi_1 - \omega\,t)) \end{pmatrix} =$$

$$2\,\omega\,v \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix} + \omega^2\,v\,t \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 - \omega\,t) \\ \sin(\varphi_1 - \omega\,t) \end{pmatrix} =$$

$$2\,\omega\,v \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} + \omega^2\,v\,t \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{\text{inertie}}(t) = -m\,\vec{s}\,''(t) = -2\,m\,\omega\,v \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} - m\,\omega^2\,v\,t \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

La composante radiale est la force centripète

$$\vec{F}_{\text{centripète}}(t) = -m\,\omega^2\,v\,t \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} = -m\,\omega^2\,\vec{r}_2(t)$$

La composante tangentielle est la force de Coriolis

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}}(t) = -m\,\vec{s}\,''(t) = -2\,m\,\omega\,v \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

Figure 6.2 : parallélogramme des forces

Force de Coriolis

norme: $2\,m\,\omega\,v$

direction: perpendiculaire au rayon OP

sens: opposée au sens de rotation du plateau

§ 4.4 Forces de Coriolis sur la terre

Pour simplifier, nous nous sommes limités jusqu'ici à des problèmes en dimension 2. Considérons maintenant une conséquence de la rotation de la terre autour de son axe: en appliquant le principe de D'Alembert à trois dimensions apparaissent des forces de Coriolis sur tous les mouvements qui se rapprochent ou s'éloignent de l'axe de rotation.

■ Quelques repères historiques

Gustave Gaspard de Coriolis est un mathématicien né à Paris en 1792, auteur de travaux sur la cinématique. La publication principale de M. de Coriolis date de 1835 soit 92 ans après les travaux de D'Alembert.

■ La force de Coriolis

Direction : la force de Coriolis est perpendiculaire à l'axe de rotation de la terre et à la direction du déplacement du corps.

Sens: dévie vers la droite dans l'hémisphère Nord (vers la gauche dans l'hémisphère Sud).

Intensité : proportionnelle à la masse et à la vitesse du corps et dépend de la latitude.

■ Effets de la force de Coriolis

§ 4.5 Exercices