Le nombre π

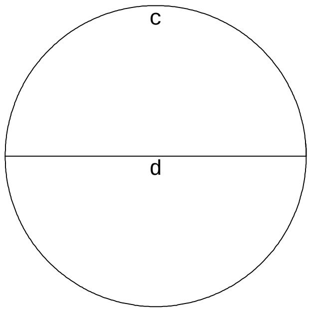
I. Définitions du nombre π

Vers 2700 ans avant J.-C. , les Egyptiens, selon qu'ils calculaient des longueurs ou des aires, utilisaient deux valeurs distinctes de π. La circonférence d'un cercle était déterminée de la manière suivante: $C = 3\,d$ ce qui correspond à $\pi = 3$. Mais, pour calculer l'aire d'un disque, ils procédaient comme suit: $A = (\frac{8\,d}{9})^2$ ce qui correspond à $\pi = (\frac{16}{9})^2 \simeq 3.1605$.

■ Première définition de π

Dans un cercle,

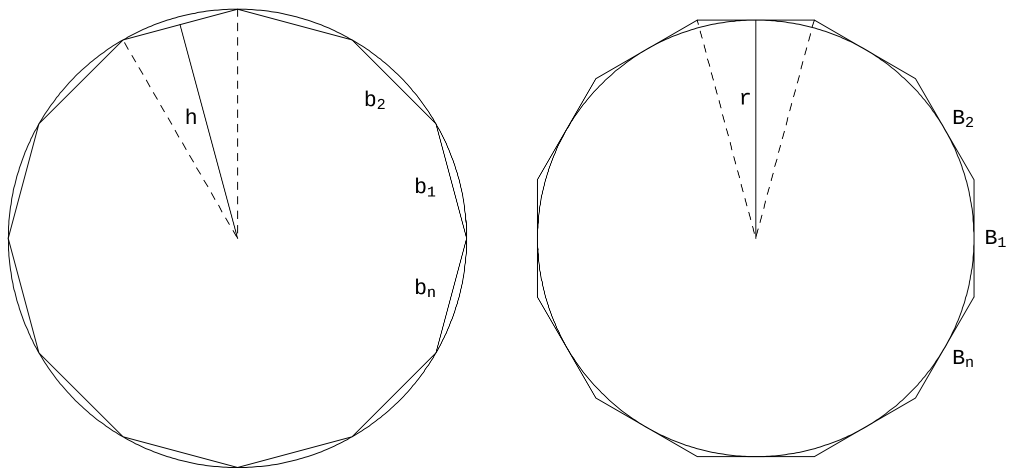
$$c = 2\,\pi_1\,r = \pi_1\,d$$



$$\boxed{\pi_1 = \frac{c}{d} = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}}$$

■ Calcul numérique de π avec la méthode d'Archimède

```
n = 12;
```



Périmètres des polygones inscrit et circonscrit à 12 côtés

$$24\, r\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{24}\right] \le 2\pi r \le 24\, r\, \mathrm{Tan}\left[\frac{2\pi}{24}\right]$$

$$6\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right) r \le 2\pi r \le 24\left(2-\sqrt{3}\right) r$$

$$3\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right) \le \pi \le 12\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$\pi = \frac{3\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)+12\left(2-\sqrt{3}\right)}{2} \simeq 3.16061$$

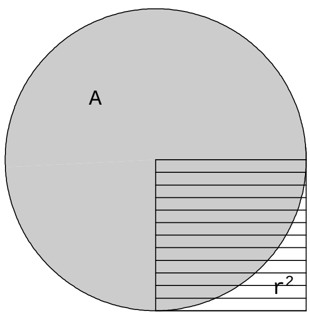
$$\Delta\pi = \frac{12\left(2-\sqrt{3}\right)-3\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)}{2} \simeq 0.0547809$$

$$\pi = 3.16 \pm 0.06$$

■ Deuxième définition de π

Dans un disque,

$$A = \pi_2\, r^2$$



$$\boxed{\pi_2 = \frac{A}{r^2} = \frac{\text{aire du disque de rayon } r}{\text{aire du carré de côté } r}}$$

■ Equivalence des deux définitions de π

Proposition:

$$\pi_1 = \pi_2$$

Démonstration:

$$\frac{1}{2}\, h\, b_1 + \ldots + \frac{1}{2}\, h\, b_n \le A \le \frac{1}{2}\, B_1\, r + \ldots + \frac{1}{2}\, B_n\, r$$

$$\frac{1}{2}\, h\, (b_1 + \ldots + b_n) \le \pi_2\, r^2 \le \frac{1}{2}\, r\, (B_1 + \ldots + B_n)$$

Pour n tendant vers l'infini, les périmètres inscrit et circonscrit tendent vers la circonférence du cercle et h tend vers r:

$$\frac{1}{2}\, r\, (2\, \pi_1\, r) \le \pi_2\, r^2 \le \frac{1}{2}\, r\, (2\, \pi_1\, r)$$

$$\pi_1 \le \pi_2 \le \pi_1$$

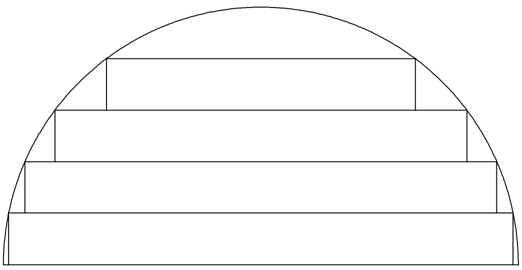
■ Troisième définition de π

Le volume d'une boule est

$$V = \frac{4}{3}\, \pi_3\, r^3$$

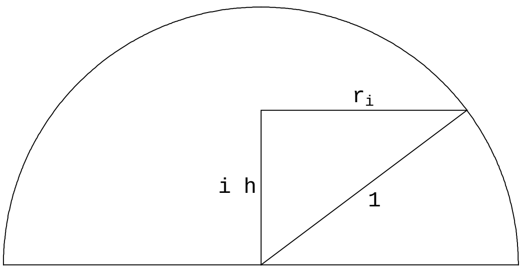
De ce point de vue, le volume d'une boule de rayon 1 est $V_1 = \frac{4}{3}\, \pi_3$. Considérons une demi-boule de rayon 1 et déterminons une approximation par défaut au moyen d'un empilement de n disques de même épaisseur $h = \frac{1}{n}$

Coupe pour n = 5



Le rayon du i-ème cylindre vérifie $r_i^2 + (i\, h)^2 = 1^2$ d'où $r_i = \sqrt{1 - (i\, h)^2} = \sqrt{1 - (\frac{i}{n})^2}$

Rayon du i-ème cylindre. Fig. pour i = 3



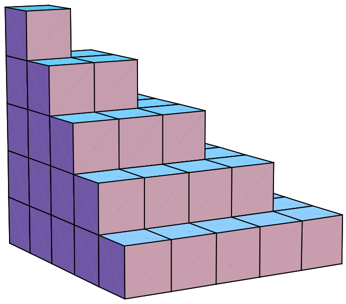
Le volume de l'empilement de cylindres est donc

$$\pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h + \pi r_3^2 h + .. + \pi r_n^2 = \pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + .. + r_n^2) =$$

$$\pi \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{n}\right)^2 + ... + 1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) =$$

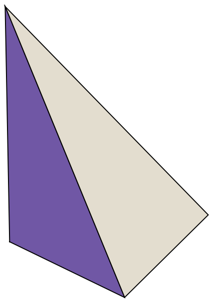
$$= \pi - \pi \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \right\}$$

Dans cette expression, la valeur de π est celle qui apparaît dans l'aire du disque. La dernière accolade représente un volume que nous représentons graphiquement comme suit:



Pour n tendant vers l'infini, ce volume tend vers une pyramide dont la base est un carré de côté 1 et la hauteur est de 1; son volume est donc $\frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3}$. Le volume de l'empilement de cylindres tend donc vers

$$\pi - \pi \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \right\} \quad \to \quad \pi - \pi \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$$



qui représente le volume de la demi-boule. Le volume de la boule de rayon 1 est

$$V_1 = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

Il s'ensuit que $\pi_3 = \pi$.

■ Quatrième définition de π

L'aire d'une sphère est

$$A = 4\,\pi_4\,r^2$$

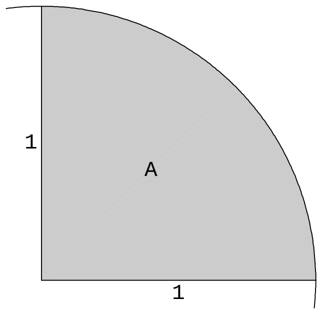
De ce point de vue, l'aire d'une boule de rayon 1 est $A = 4\,\pi_4$.

II. Calcul du nombre π

■ Calcul numérique de π avec des sommes de Darboux

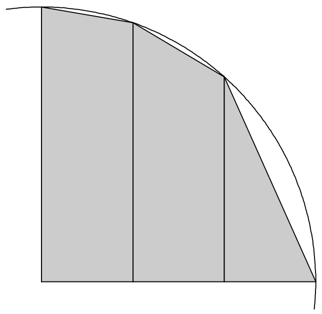
π est égal à quatre fois l'aire du quart de cercle de rayon 1:

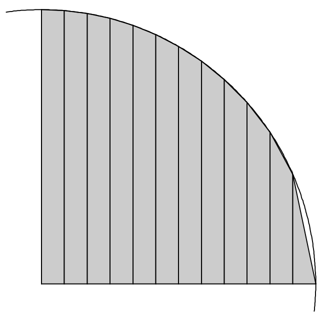
$$A = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \pi = 4A$$



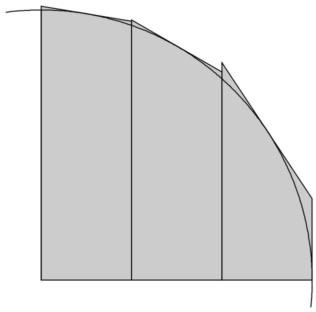
Nous présentons d'abord une méthode qu'on puisse rapidement expliquer, mais qui nécessite l'usage d'un ordinateur.

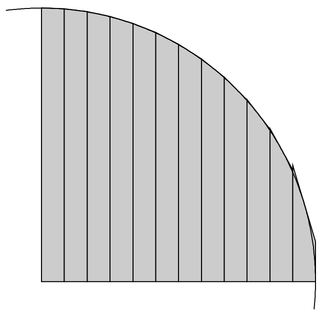
L'aire est encadrée par une valeur inférieure et une valeur supérieure.
La somme inférieure est constituée par les aires de n trapèzes (voir figures ci-dessous).



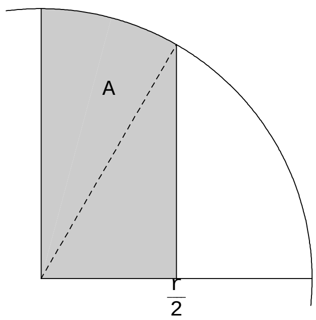


La somme supérieure est constituée par les aires de n trapèzes dont le côté supérieur est tangent au cercle, l'abscisse du point de tangence étant située au milieu de l'intervalle partiel (voir figure ci dessous).





On voit que, pour les approximations par défaut et par excès, l'erreur est plus grande sur les trapèzes situés sur la droite. Pour diminuer l'erreur, il vaut mieux organiser les calculs de manière à n'utiliser que les trapèzes situés sur la gauche. Calculons l'aire de la surface grisée ci-dessous:



Elle est constituée d'un secteur circulaire dont l'angle au centre est de $30°$ et d'un triangle rectangle dont l'angle au centre est de $60°$. Son aire est égale à

$$A = \pi r^2 \frac{30°}{360°} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2}\right)\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right) = r^2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\pi = \frac{12A}{r^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Choisissons $r = 1$.

■ Notations et formules

La fonction qui décrit le cercle est

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2};$$

l'ntervalle des abscisses est $[0;\ b]$ où

$$b = \frac{1}{2};$$

soit n le nombre d'intervalles partiels; la longueur d'un intervalle partiel est

$$h = \frac{b}{n};$$

les extrémités des intervalles partiels sont

$$x_i = i\,h, \qquad i = 0, 1, \ldots, n;$$

les milieux des intervalles partiels sont

$$\xi_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) h, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

La somme inférieure est constituée par les aires de n trapèzes

$$\underline{S} = h\,\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\,\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \ldots + h\,\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} =$$
$$h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right) =$$
$$\frac{2}{n}\left(\frac{f(0)}{2} + f(h) + f(2h) \ldots + f((n-1)h) + \frac{f(b)}{2}\right) =$$
$$h\left(\frac{f(0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 - (i\,h)^2} + \frac{f(b)}{2}\right)$$

L'approximation de π par défaut est donnée par

$$\underline{\pi} = 12\,\underline{S} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

La somme supérieure est constituée par les aires de n trapèzes

$$\bar{S} = h\,f(\xi_1) + h\,f(\xi_2) + \ldots + h\,f(\xi_n) = h\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\left(i - \frac{1}{2}\right) h\right)^2}\right)$$

L'approximation de π par excès est donnée par

$$\bar{\pi} = 12\,\bar{S} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

■ Calcul avec Mathematica

```
n = 10^5; b = 1/2; h = b/n;
```

$$\texttt{si} = h\left(\frac{f[0]}{2} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} f[i\,h]\right) + \frac{f[b]}{2}\right);$$

$$\texttt{ai} = N\left[12\,\texttt{si} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right];\ \texttt{NumberForm[ai, 16]}$$

3.141592653575353

$$\texttt{ss} = h\sum_{i=1}^{n} f\left[\left(i - \frac{1}{2}\right) h\right];$$

$$\texttt{as} = N\left[12\,\texttt{ss} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right];\ \texttt{NumberForm[as, 16]}$$

3.141592653596883

$$\texttt{NumberForm}\left[\frac{\texttt{as} - \texttt{ai}}{2}, 16\right]$$

$1.076516653597537 \times 10^{-11}$

```
NumberForm[(ai + as)/2, 12]
```

```
3.14159265359
```

Au prix d'un lourd calcul (environ 200 000 extractions de racines carrées), on a finalement obtenu une valeur de π à 12 chiffres significatifs, ce qui montre que la méthode est assez peu efficace.

■ Calcul numérique de π à 100 chiffres (vers 1700)

On met au point une méthode de calcul efficace mais malheureusement trop longue à expliquer ici (ce développement pourrait faire l'objet d'un travail de maturité).

<u>Grégory, 1671</u>

La réciproque de la fonction tangente est exprimée au moyen d'une série

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \ldots$$

<u>Machin, 1706</u>

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Calcul numérique des 100 premiers chiffres (il suffit de prendre les 70 premiers termes de la série):

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{17}}{17} - \frac{x^{19}}{19} + \frac{x^{21}}{21} - \frac{x^{23}}{23} + \frac{x^{25}}{25} - \frac{x^{27}}{27} + \frac{x^{29}}{29} - \frac{x^{31}}{31} +$$
$$\frac{x^{33}}{33} - \frac{x^{35}}{35} + \frac{x^{37}}{37} - \frac{x^{39}}{39} + \frac{x^{41}}{41} - \frac{x^{43}}{43} + \frac{x^{45}}{45} - \frac{x^{47}}{47} + \frac{x^{49}}{49} - \frac{x^{51}}{51} + \frac{x^{53}}{53} - \frac{x^{55}}{55} + \frac{x^{57}}{57} - \frac{x^{59}}{59} +$$
$$\frac{x^{61}}{61} - \frac{x^{63}}{63} + \frac{x^{65}}{65} - \frac{x^{67}}{67} + \frac{x^{69}}{69} - \frac{x^{71}}{71} + \frac{x^{73}}{73} - \frac{x^{75}}{75} + \frac{x^{77}}{77} - \frac{x^{79}}{79} + \frac{x^{81}}{81} - \frac{x^{83}}{83} + \frac{x^{85}}{85} - \frac{x^{87}}{87} +$$
$$\frac{x^{89}}{89} - \frac{x^{91}}{91} + \frac{x^{93}}{93} - \frac{x^{95}}{95} + \frac{x^{97}}{97} - \frac{x^{99}}{99} + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{103}}{103} + \frac{x^{105}}{105} - \frac{x^{107}}{107} + \frac{x^{109}}{109} - \frac{x^{111}}{111} + \frac{x^{113}}{113} -$$
$$\frac{x^{115}}{115} + \frac{x^{117}}{117} - \frac{x^{119}}{119} + \frac{x^{121}}{121} - \frac{x^{123}}{123} + \frac{x^{125}}{125} - \frac{x^{127}}{127} + \frac{x^{129}}{129} - \frac{x^{131}}{131} + \frac{x^{133}}{133} - \frac{x^{135}}{135} + \frac{x^{137}}{137} - \frac{x^{139}}{139}$$

On obtient l'approximation de π suivante:

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899
 86280348253421170676778279277
```

L'erreur est

$$-3.043201588 \times 10^{-100}$$

■ Aujourd'hui

Avec des méthodes plus performantes encore et des ordinateurs, on peut calculer des millions de décimales de π. Voici par exemple les 10 000 premiers chiffres de π calculés avec *Mathematica*:

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899
 86280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502
 84102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165
```

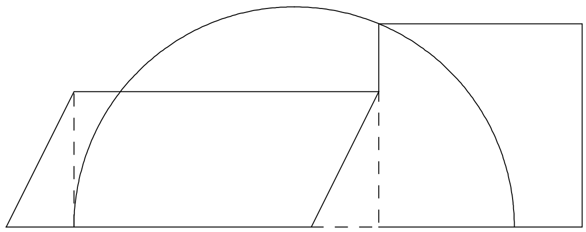
```
1201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724587006606315588174881
1520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057
7270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227
7938183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179860943702770539217
7176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757789609173637178
8721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418
8159813629774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024459455
5346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177
7669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532171226806613
3001927876611195909216420198938095257201065485863278865936153381827968230301952035
5301852968995773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829533116861
7278558890750983817546374649393192550604009277016711390098488240128583616035637076
7660104710181942955596198946767837449448255379774726847104047534646208046684259069
4912933136770289891521047521620569660240580381501935112533824300355876402474964732
6391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570674983
8505494588586926995690927210797509302955321165344987202755960236480665499119881834
7977535663698074265425278625518184175746728909777727938000816470600161452491921732
1721477235014144197356854816136115735255213347574184946843852332390739414333454776
2416862518983569485562099219222184272550254256887671790494601653466804988627232791
7860857843838279679766814541009538837863609506800642251252051173929848960841284886
2694560424196528502221066118630674427862203919494504712371378696095636437191728746
7764657573962413890865832645995813390478027590099465764078951269468398352595709825
8226205224894077267194782684826014769909026401363944374553050682034962524517493996
5143142980919065925093722169646151570985838741059788595977297549893016175392846813
8268683868942774155991855925245953959431049972524680845987273644695848653836736222
6260991246080512438843904512441365497627807977156914359977001296160894416948685558
4840635342207222582848864815845602850601684273945226746767889525213852254995466672
7823986456596116354886230577456498035593634568174324112515076069479451096596094025
2288797108931456691368672287489405601015033086179286809208747609178249385890097149
0967598526136554978189312978482168299894872265880485756401427047755513237964145152
3746234364542858444795265867821051141354735739523113427166102135969536231442952484
9371871101457654035902799344037420073105785390621983874478084784896833214457138687
5194350643021845319104848100537061468067491927819119793995206141966342875444064374
5123718192179998391015919561814675142691239748940907186494231961567945208095146550
2252316038819301420937621378559566389377870830390697920773467221825625996615014215
0306803844773454920260541466592520149744285073251866600213243408819071048633173464
9651453905796268561005508106658796998163574736384052571459102897064140110971206280
4390397595156771577004203378699360072305587631763594218731251471205329281918261861
2586732157919841484882916447060957527069572209175671167229109816909152801735067127
4858322287183520935396572512108357915136988209144421006751033467110314126711136990
8658516398315019701651511685171437657618351556508849099989859982387345528331635507
6479185358932261854896321329330898570642046752590709154814165498594616371802709819
9430992448895757128289059232332609729971208443357326548938239119325974636673058360
4142813883032038249037589852437441702913276561809377344403070746921120191302033038
0197621101100449293215160842444859637669838952286847831235526582131449576857262433
4418930396864262434107732269780280731891544110104468232527162010526522721116603966
6557309254711055785376346682065310989652691862056476931257058635662018558100729360
6598764861179104533488503461136576867532494416680396265797877185560845529654126654
0853061434443185867697514566140680070023787765913440171274947042056223053899456131
4071127000407854733269939081454664645880797270826683063432858785698305235808933065
7574067954571637752542021149557615814002501262285941302164715509792592309907965473
7612551765675135751782966645477917450112996148903046399471329621073404375189573596
1458901938971311179042978285647503203198691514028708085990480109412147221317947647
7726224142548545403321571853061422881375850430633217518297986622371721591607716692
5474873898665494945011465406284336639379003976926567214638530673609657120918076383
2716641627488880078692560290228472104031721186082041900042296617119637792133757511
4959501566049631862947265473642523081770367515906735023507283540567040386743513622
2247715891504953098444893330963408780769325993978054193414473774418426312986080998
8868741326047215695162396586457302163159819319516735381297416772947867242292465436
6800980676928238280689964004824354037014163149658979409243237896907069779422362508
2216889573837986230015937764716512289357860158816175578297352334460428151262720373
4314653197777416031990665541876397929334419521541341899485444734567383162499341913
1814809277771038638773431772075456545322077709212019051660962804909263601975988281
613323166636528619326686336062735
```

3567630354477628035045077723554710585954870279081435624014517180624643626794561275318134078330336254232783944975382437205835311477119926063813346776879695970309833913077109870408591337464144282277263465947047458784778720192771528073176790770715721344473060570073349243693113835049316312840425121925651798069411352801314701304781643788518529092854520116583934196562134914341595625865865570552690496520985803385072242648293972858478316305777756068887644624824685792603953527734803048029005876075825104747091643961362676044925627420420832085661190625454337213153595845068772460290161876679524061634252257719542916299193064553779914037340432875262888963995879475729174642635745525407909145135711136941091193932519107602082520261879853188770584297259167781314969900901921169717372784768472686084900337702424291651300500516832336435038951702989392233451722013812806965011784408745196012122859937162313017114448464090389064495444006198690754851602632750529834918740786680881833851022833450850486082503930213321971551843063545500766828294930413776552793975175461395398468339363830474611996653858153842056853386218672523340283087112328278921250771262946322956398989893582116745627010218356462201349671518819097303811980049734072396103685406643193950979019069963955245300545058068550195673022921913933918568034490398205955100226353536192041994745538593810234395544959778377902374216172711172364343543947822181852862408514006660443325888569867054315470696574745855033232334210730154594051655379068662733379958511562578432298827372319898757141595781119635833005940873068121602876496286744604774649159950549737425626901049037781986835938146574126804925648798556145372347867330390468838343634655379498641927056387293174872332083760112302991136793862708943879936201629515413371424892830722012690147546684765357616477379467520049075715552781965362132392640616013635815590742202020318727760527721900556148425551879253034351398442532234157623361064250639049750086562710953591946589751413103482276930624743536325691607815478181152843667957061108615331504452127473924544945423682886061340841486377670096120715124914043027253860764823634143346235189757664521641376796903149501910857598442391986291642193994907236234646844117394032659184044378051333894525742399508296591228508555821572503107125701266830240292952522011872676756220415420516184163484756516999811614101002996078386909291603028840026910414079288621507842451670908700069928212066041837180653556725253256753286129104248776182582976515795984703562226293486003415872298053498965022629174878820273420922224533985626476691490556284250391275771028402799806636582548892648802545661017296702664076559042909945681506526530537182941270336931378517860904070866711496558343434769338578171138645587367812301458768712660348913909562009939361031029161615288138437909904231747336394804575931493140529763475748119356709110137751721008031559024853090669203767192203322909433467685142214477379393751703443661991040337511173547191855046449026365512816228824462575916333039107225383742182140883508657391771509682887478265699599574490661758344137522397096834080053559849175417381883999446974867626551658276584835884531427756879002909517028352971634456212964043523117600665101241200659755851276178583829204197484423608007193045761893234922927965019875187212726750798125547095890455635792122103334669749923563025494780249011419521238281530911407907386025152274299581807247162591668545133312394804947079119153267343028244186041426363954800044800267049624820179289647669758318327131425170296923488962766844032326092752496035799646925650493681836090032380929345958897069536534940603402166544375589004563288225054525564056448246515187547119621844396582533754388569094113031509526179378002974120766514793942590298969594699556576121865619673378623625612521632086286922210327488921865436480229678070576561514463204692790682120738837781423356282360896320806822246801224826117718589638140918390367367222088832151375560037279839400415297002878307667094447456013455641725437090697939612257142989467154357846878861444581231459357198492252847160504922124247014121478057345510500801908699603302763478708108175450119307141223390866393833952942578690507643100638351983438934159613185434754649556978103829309716465143840700707360411237359984345225161050702705623526601276484830840761183013052793205427462865403603674532865105706587488225698157936789766974220575059683440869735020141020672358502007245225632651341055924019027421624843914035998953539459094407046912091409387001264560016237428802109276457931065792295524988727584610126483699989225695968815920560010165525637568

III. Transcendance du nombre π

■ Les problèmes de quadrature

Considérons par exemple le problème de la quadrature du parallélogramme:
un parallélogramme étant donné, construire - avec la règle et le compas - un carré de même aire.



1° le parallélogramme est transformé en un rectangle de dimensions p, q;
2° au moyen du théorème de la hauteur, on construit h tel que $h^2 = p\,q$;
3° le carré de côté h est solution.

■ La quadrature du cercle

Un disque étant donné, construire - avec la règle et le compas - un carré de même aire.

Pendant des siècles, de nombreux mathématiciens ont effectué de nombreuses recherches sur ce problème, sans succès.

En 1882, l'allemand Ferdinand Lindemann démontra que π est un nombre transcendant (c'est-à-dire qu'il ne vérifie aucune équation à coefficients entiers). Une conséquence de ce théorème d'algèbre est que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution.

Une autre conséquence est que π est un nombre irrationnel (en particulier $\pi \neq 3.1416$ et $\pi \neq \frac{22}{7}$).